Материалы к семинарам по матанализу
10-я неделя (20–25.11.2017)

Краткое содержание лекций

Лекция 12. (22.11.2017)

1. Правило Лопиталя
2. Построение графиков
3. Локальная теорема об обратной функции
4. Старшие производные
5. Выпуклые и вогнутые C^2-гладкие функции
6. Единственность экстремума
7. Средние арифметические

Примерные задачи семинаров 21 и 22

Правило Лопиталя

Задача 10.1. Найдите пределы при $x \to 0$ следующих функций: а) $\frac{\sin nx}{\sin mx}$

б) $\frac{1-\cos x}{x^2}$

в) $\frac{\sin x - \operatorname{tg} x}{x^3}$

г) $\frac{\sqrt{1+x}-1}{\sin x}$

д) $\frac{\sqrt{1+x}-(1+\frac{x}{2})}{\sin x^2}$

е) $\frac{(1+x^2)^{\frac{1}{3}}-1}{x^n}, \ n = 1, 2, 3$

Задача 10.2. Пусть $f(x) \to 0, \ g(x) \to 0$ при $x \to \infty, \ g \neq 0$. Докажите, что

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

если предел справа существует.

Задача 10.3. Пусть $f(x) \to \infty, \ g(x) \to \infty$ при $x \to 0, \ g \neq 0$. Докажите, что

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

если предел справа существует.

Задача 10.4. Найдите а) $\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^4-x^3}-x^2}{x}$

б) $\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^6+x^5}-\sqrt[3]{x^9+x^8}}{x^2}$

Локальная обратимость функций

Задача 10.5. В окрестности каких точек функция $\sin x$ локально обратима?

Задача 10.6. Нарисуйте график функции $\arcsin(\sin x)$.

Вторая производная. Выпуклость и вогнутость функций

Задача 10.7. Доказать или опровергнуть, что из выпуклости (вогнутости) функций f и g следует выпуклость (соответственно, вогнутость) функций а) $f+g$, б) fg.

Задача 10.8. Доказать, что если функции f и g выпуклые (вогнутые) и функция f не убывает (не возрастает), то функция $f \circ g$ — также выпуклая (вогнутая). Можно ли избавиться от условия неубывания функции f?

Задача 10.9. Найти промежутки выпуклости и вогнутости следующих функций:
а) $f(x) = ax + b$, $a, b \in \mathbb{R}$, б) $f(x) = x + \sin x$, в) $f(x) = \sqrt{x-1}$, г) $f(x) = x^p$, $p \in \mathbb{R}$, $x > 0$.

Задача 10.10. Пусть функция f является выпуклой на некотором интервале I.

а) Докажите, что для любых $q \in [0, 1]$, $x_1, x_2 \in I$ верно:

$$f(qx_1 + (1-q)x_2) \leq qf(x_1) + (1-q)f(x_2)$$

б) Докажите, что для любых $x_1, x_2, x_3 \in I$ верно:

$$f\left(\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{4}x_2 + \frac{1}{4}x_3\right) \leq \frac{1}{2}f(x_1) + \frac{1}{4}f(x_2) + \frac{1}{4}f(x_3).$$

в)*(Неравенство Йенсена) Пусть положительные числа $q_1, \ldots, q_n$ удовлетворяют соотношению $q_1 + \ldots + q_n = 1$. Докажите, что для любых $x_1, \ldots, x_n \in I$ выполнено неравенство

$$f(q_1x_1 + \ldots + q_nx_n) \leq q_1f(x_1) + \ldots + q_nf(x_n).$$

Можно ли получить аналогичное неравенство для вогнутых функций?

Задача 10.11. Докажите, что график выпуклой функции лежит по одну сторону от любой своей касательной.

Задача 10.12. Верно ли, что функция f имеет единственный экстремум на вещественной оси. Если да, то какой: минимум или максимум?

а)$f(x) = x^2 + \sin^3(x-1)$

б) $f(x) = x^4 - \cos(x+1)$

О-символика и эквивалентность.

Скажем, что функции f и g, определенные в проколотой окрестности точки x_0, эквивалентны при $x \to x_0$, если $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$ (пишут $f \sim g$).

Задача 10.13. Доказать, что отношение $\sim$ задает отношение эквивалентности.

Задача 10.14. Докажите, что при $x \to 0$ имеем а) $\sin x \sim x$, б) $1 - \cos x \sim x^2/2$; в) $\arctan x \sim x$, г) $(1+x)^a - 1 \sim ax$, $a \in \mathbb{R}$.

Задача 10.15. Найдите мноном вида x^a, $a \in \mathbb{R}_+$, такой что при $x \to 0$ ему эквивалентна функция
а) $\sin(2x^2)$, б) $\cos(4x + 3x^2) - 1$, в) $|x|$, г) $\frac{1}{2-3x}$, *д) $2^{-1/x^2}$,
если такой моном существует.

Задача 10.16. Пусть $f_1 \sim g_1$ и $f_2 \sim g_2$ при $x \to x_0$. Следует ли отсюда, что $f_1+f_2 \sim g_1+g_2$, $f_1f_2 \sim g_1g_2$, $f_1/f_2 \sim g_1/g_2$?

Задача 10.17. Пусть функции f и g определены в (проколотой) окрестности точки x_0. Доказать, что при $x \to x_0$ выполнено а)$o(f) + o(f) = o(f)$, б)$o(o(f)) = o(f)$, в)$o(f)o(g) = o(fg)$.

Задача 10.18. Доказать, что а)$f \sim g \Rightarrow f - g = o(f) = o(g)$, б)$f = o(g) \Rightarrow f + g \sim g$.