Введение в топологию (Гладкие многообразия). Листок 2.

Задача 1. Наделим пространство $\mathbb{R}^n$ наделим стандартным координатным скалярным произведением, $\langle (a_1, ..., a_n), (b_1, ..., b_n) \rangle = \sum a_i b_i$. Пусть A – симметрический оператор в $\mathbb{R}^n$. Рассмотрим функцию $\langle Ax, x \rangle$ на единичной сфере. Докажите, что ее критические точки это собственные векторы оператора A.

Задача 2. Критическая точка z функции f называется невырожденной, если матрица $(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(z))$ невырождена. Проверьте, что это условие не зависит от выбора системы координат в окрестности точки z.

Задача 3. Выясните, когда критические точки функции из первой задачи невырожденны.

Пусть M – компактное подмногообразие в $\mathbb{R}^N$, имеющее размерность k. S^{N-1} – единичная сфера. Рассмотрим подмножество L в $S^{N-1} \times M$, состоящее из всех пар (v, x), таких что (направление вектора) v ортогонален $T_x M$.

Задача 4. Докажите, что L является подмногообразием в $S^{N-1} \times M$. Найдите его размерность.

Задача 5. Рассмотрим ограничение естественной проекции $S^{N-1} \times M \to S^{N-1}$ (забывание второго аргумента) на L. Докажите, что v является регулярным значением этого отображения, если ограничение функции $\langle v, x \rangle$ на L является функцией Морса (т.е. функцией, все критические точки которой невырождены). Верно ли обратное? Докажите, что на M есть функции Морса.