1 Принцип наименьшего действия

2 Законы сохранения

3 Интегралы движения и задача Кеплера

4 Дифференциальные формы

5 Уравнения Гамильтона

6 Скобки Пуассона

7 Примеры пуассоновых многообразий

8 Канонические преобразования

9 Канонические преобразования и уравнение Гамильтона-Якоби

10 Уравнение Гамильтона-Якоби и интегрируемость

11 Интегрируемость: теорема Лиувилля

11.1 Теорема Лиувилля

Определение: Система (на фазовом пространстве $\dim \mathcal{M} = 2N$) называется вполне интегрируемой, когда существует N функционально независимых *интегралов движения* – локальных функций $I_k \in Fun(\mathcal{M})$ в инволюции между собой

$$\{I_k, I_l\} = 0, \qquad k = 1, \ldots, N \tag{1}$$

относительно скобки Пуассона.

Пример: Свободное движение $H = \sum_{j=1}^{N} \frac{p_j^2}{2m}$, тогда $I_k = p_k$ (или $\sum_{i_1<\ldots<i_k} p_{i_1} \ldots p_{i_k}$), $\{I_k, I_l\} = \{p_k, p_l\} = 0$. Пример тривиальный, но базовый для вполне-интегрируемых систем, $N = \frac{1}{2}\dim\mathcal{M}$ интегралов движения, которые выбираются неоднозначно.

Замечание: Независимых интегралов движения не может быть больше чем $N = \frac{1}{2}\dim\mathcal{M}$.

Если N функций – функционально независимых интегралов движения находятся в пуассоновой инволюции (1), то соответствующие им (линейно независимые!) гамильтоновы векторные поля

$$\begin{gathered} \xi_k = \Omega dI_k, \qquad k = 1, \ldots, N \\ [\xi_k, \xi_l] = 0, \qquad \forall\ k, l \end{gathered} \tag{2}$$

коммутируют (как дифференциальные операторы). Очевидно также, что они ортогональны в симплектическом смысле, то есть

$$\langle \xi_k, \xi_l \rangle = \omega(\xi_k, \xi_l) = \{I_k, I_l\} = 0, \qquad \forall\ k, l \tag{3}$$

N векторов $\{\xi_1, \ldots, \xi_N\}$ линейно независимы, а их линейная оболочка образует N-мерную плоскость

$$W = \xi_1 \wedge \ldots \wedge \xi_N \subset \mathbb{R}^{2N} = T\mathcal{M} \tag{4}$$

Эта плоскость является максимально-изотропным пространством, т.е. $W \wedge W = 0$, также эти максимально-изотропные плоскости половинной размерности называются лагранжевыми. Локально максимально-изотропные плоскости выглядят как $\frac{\partial}{\partial q_1} \wedge \ldots \wedge \frac{\partial}{\partial q_N}$ (или $\frac{\partial}{\partial p_1} \wedge \ldots \wedge \frac{\partial}{\partial p_N}$) и их уже нельзя "расширить" коммутирующим вектором, т.к. любой новый линейно-независимый вектор обязан содержать хотя бы один $\frac{\partial}{\partial p_k}$, что сразу нарушает симплектическую ортогональность, а значит и коммутативность соответствующих гамильтонианов. В дальнейшем мы будем часто пользоваться лагранжевыми плоскостями, касательными к *лагранжевым подмногообразиям* $\mathcal{M}_C \subset \mathcal{M}$, заданными фиксированными значениями интегралов движения $I_k = C_k = \mathrm{const}$, на которых очевидно

$\omega|_{\mathcal{M}_C} = 0$. Локально эти многообразия всегда можно описать уравнениями типа $\{p_j = p_j(q, C)\}$ разрешив уравнения $I_k(p, q) = C_k$ по теореме о неявной функции, например, относительно всех импульсов.

Отсюда следует, в частности, что поскольку интегралы движения находянся в инволюции с гамильтонианом $\{H, I_k\} = 0$, то гамильтониан сам является функцией от них, например - одним из них. Сформулируем теперь важнейшую классическую

Теорема Лиувилля: Пусть на $2N$-мерном симплектическом многообразии $\mathcal{M}$ заданы N-функций в инволюции $\{I_k, I_l\} = 0$. Рассмотрим подмногообразие их линий уровня

$$\mathcal{M}_C : \quad I_k = C_k = \mathrm{const}, \qquad k = 1, \ldots, N \tag{5}$$

такое что на нем формы $\{dI_k\}$ линейно независимы в каждой точке. Тогда

- $\mathcal{M}_C$-гладкое многообразие, инвариантное относительно гамильтоновых потоков этих интегралов, в том числе гамильтониана H.
- Если $\mathcal{M}$ связно и компактно, то $\mathcal{M}_C$ диффеоморфно N-мерному тору
$$T^N : \qquad \{\varphi_1, \ldots, \varphi_N\} \quad \mod 2\pi \tag{6}$$
- Гамильтонов поток H в координатах на торе имеет вид
$$\frac{d\varphi}{dt} = \varpi(I) \tag{7}$$
т.е. свободного (условно-периодического) движения.
- Канонические уравнения Гамильтона при этом интегрируются в квадратурах.

Для доказательства сначала нужно воспользоваться тем, что линейно-независимые дифференциальные формы $\{dI_k\}$ на $\mathcal{M}_C$ порождают векторные поля $\{\xi_k = \Omega dI_k\}$, которые

- линейно-независимы (в силу независимости $\{dI_k\}$ и невырожденности $\Omega = \omega^{-1}$;

- коммутируют $[\xi_k, \xi_l] = 0$ в силу $\{I_k, I_l\} = 0$;

- касательны к $\mathcal{M}_C$ в силу

$$\xi_i I_j = \{I_i, I_j\} = 0, \quad \forall\, i, j \tag{8}$$

Отсюда следует, что $\{\xi_k\}$ образуют базис в $T\mathcal{M}_C$, и многообразие $\mathcal{M}_C$ – лагранжево, т.е. все касательные плоскости к нему лагранжевы или нулевые.

Кроме того, $\mathcal{M}_C$ инвариантно относительно действия н нем N независимых намильтоновых векторных потоков, генерируемых векторами $\{\xi_k\}$, т.е. является N-мерным тором. Доказательство этого факта (см., например у Арнольда) основано на том, что N коммутирующих векторных полей генерируют действие коммутативной группы

$$\mathbb{R}^N \supset g(t) = e^{\sum_{j=1}^N t_j \xi_j} \tag{9}$$

на $\mathcal{M}_C$. Для любой точки $P_0 \in \mathcal{M}_C$ можно изучить отображение

$$g(t)P_0 : \qquad \mathbb{R}^N \mapsto \mathcal{M}_C \tag{10}$$

которое из-за компактности $\mathcal{M}_C$ не может быть взаимно-однозначным, и можно установить, что стабилизатор любой точки $P_0 \in \mathcal{M}_C$ представляет собой дискретную подгруппу $\Gamma \subset \mathbb{R}^N$ (в силу коммутативности не зависящая от самой точки P_0). Отсюда следует, что $\mathcal{M}_C \simeq \mathbb{R}^N/\Gamma = T^N$.

11.2 Теорема Пуанкаре: интегрируемость и хаос

На теорему Лиувилля об интегрируемости интересно посмотреть и с точки зрения другой теоремы Лиувилля – о сохранении фазового объема, точнее ее следствия в виде

Теорема Пуанкаре о возвращении: В любой окрестности U любой точки компактного фазового пространства $\mathcal{M}$ найдется точка $P \in U$, такая, что при гамильтоновой динамике $g_H : \mathcal{M} \mapsto \mathcal{M}$ окажется для некоторого $n > 0$ что $g_H^n P \in U$.

Этот факт относится уже к *эргодической теории* и является почти очевидным, т.к. все области $U, g_H U, g_H^2 U, \ldots, g_H^n U, \ldots$ имеют одинаковый положительный объем (в силу теоремы Лиувилля), а значит обязаны как-то пересекаться. Забавно проиллюстрировать эту теорему на примере двухкамерного ящика с газом – если одна из камер изначально была пуста, то весь газ через некоторое время (естественно – астрономическое!) опять обязан собраться в другой. Вообще, с точки зрения эргодической теории различают две ситуации: интегрируемый случай и хаос:

- В "нормальном" случае хаоса система заметает все фазовой пространство, более или менее "равномерно" оказываясь со времени около каждой его точки.
- Интегрируемый случай – принципиально другой, система заметает в фазовом пространстве лишь подмногообразия положительной коразмерности, в полностью интегрируемом случае половинной – Лиувиллев тор, висящий над данной конкретной точкой в пространстве интегралов движения.

Этот эффект можно увидеть на картинках даже в случае одной степени свободы – "размывание" кривой, по которой происходит движение в фазовой плоскости при сохраняющейся энергии при "деавтономизации", т.е. когда гамильтониан начинает явно зависеть от времени, как например в случае уравнений Пенлеве.

11.3 Переменные действие-угол

Наконец, у нас остался вопрос – как находить в интегрируемом случае собственно уравнения (7). Очевидно, что речь опять идет о каноническом преобразовании $(p, q) \to (I, \varphi)$, таком что симплектическая форма

$$\omega = \sum_{j=1}^{N} dp_j \wedge dq_j = \sum_{j=1}^{N} dI_j \wedge d\varphi_j \tag{11}$$

инвариантна, а гамильтониан в силу

$$\begin{gathered} \{I_k, I_l\} = 0, \qquad k, l = 1, \ldots, N \\ \{H, I_k\} = 0 \end{gathered} \tag{12}$$

является функцией лишь интегралов движения $H = H(I_1, \dots, I_N)$. Тогда в новых переменных

$$\begin{gathered} \dot{I}_k = 0, \qquad \dot{\varphi}_k = \frac{\partial H}{\partial I_k}, \qquad k = 1, \dots, N \\ \varphi_k = \varphi_k(0) + \frac{\partial H}{\partial I_k} t = \varphi_k(0) + \varpi_k(I) t \end{gathered} \tag{13}$$

Формальный ответ на вопрос о переменных действия дает

Теорема: Пусть $\{\gamma_j\}$, $j = 1, \dots, N$ – базисные циклы лиувиллевского тора $\mathcal{M}_C = T^N$, такие что при обходе j-го цикла $\Delta\varphi_i = 2\pi\delta_{ij}$. Тогда переменные действия можно определить как

$$I_j = \frac{1}{2\pi} \oint_{\gamma_j} \sum_{k=1}^{N} p_k dq_k, \qquad j = 1, \dots, N \tag{14}$$

интегралы от формы $\alpha = pdq$ по соответствующим циклам.

Мы уже доказывали, что $\mathcal{M}_C$ – лагранжево подмногообразие, т.е. на нем $\omega|_{\mathcal{M}_C} = 0$. Значит для ограничения формы $\alpha_C = \alpha|_{\mathcal{M}_C}$ на $\mathcal{M}_C$ имеем

$$d\alpha_C = 0 \tag{15}$$

а значит интеграл

$$\int_{P_0}^{P} \alpha_C = \int_{P_0}^{P} pdq = S(P) \tag{16}$$

не зависит от контура и определяет локально некоторую функцию на $\mathcal{M}_C$. Глобально на торе эта функция многозначна, а ее скачки при обходе по базисным контурам определяются как раз периодами

$$\Delta S_j = \oint_{\gamma_j} \alpha_C = 2\pi I_j, \qquad j = 1, \dots, N \tag{17}$$

Лагранжево подмногообразие $\mathcal{M}_C$ в окрестности некоторой точки P_0 можно локально задать уравнениями

$$p_j = p_j(I, q), \qquad j = 1, \dots, N \tag{18}$$

Тогда функцию (однозначную в окрестности точки P_0, $q(P_0) = q_0$)

$$S(q, I) = \int_{q_0}^{q} \sum_{j=1}^{N} p_j(I, x) dx_j \tag{19}$$

можно считать производящей функцией канонического преобразования $(p, q) \to (I, \varphi)$, т.е. определить

$$
\begin{aligned}
pdq &= -\varphi dI + dS \\
p = \frac{\partial S}{\partial q}, &\quad \varphi = \frac{\partial S}{\partial I}
\end{aligned}
\tag{20}
$$

Новые координаты будут неоднозначными, с периодами

$$
\Delta_i \varphi_j = \frac{\partial}{\partial I_i} \Delta_j S = \frac{\partial}{\partial I_i} \oint_{\gamma_j} pdq = 2\pi \delta_{ij} \tag{21}
$$

11.4 Примеры

1. *Гармонический осциллятор* с гамильтонианом

$$
H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\varpi^2 q^2}{2} \tag{22}
$$

траектории которого при $H = E$ представляют собой эллипс

$$
\frac{p^2}{2mE} + \frac{q^2}{2E/m\varpi^2} = 1 \tag{23}
$$

так что действие в данном случае

$$
\begin{aligned}
I &= \frac{1}{2\pi} \oint_\gamma pdq = \frac{1}{2\pi} \int dp \wedge dq = \\
&= \frac{1}{2\pi} \pi \sqrt{2mE} \sqrt{2E/m\varpi^2} = \frac{E}{\varpi}
\end{aligned}
\tag{24}
$$

а угловая переменная связана с временем частотой

$$
\frac{\partial E}{\partial I} = \varpi, \qquad \varphi = \varphi_0 + \varpi t \tag{25}
$$

собственных колебаний гармонического осциллятора.

2. *Физический маятник* с гамильтонианом

$$
H = \frac{p^2}{2mL^2} - mgL \cos\phi \tag{26}
$$

или каноническими уравнениями

$$\begin{aligned}\dot{\phi} &= \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{mL^2}\\ \dot{p} &= -\frac{\partial H}{\partial \phi} = -mgL\sin\phi\end{aligned} \tag{27}$$

т.е.

$$\ddot{\phi} + \omega^2 \sin\phi = 0, \qquad \omega^2 = \frac{g}{L} \tag{28}$$

которое при малых отклонениях $\sin\phi \approx \phi$ превращается в уравнение математического маятника – гармонического осциллятора $\ddot{\phi} - \omega^2\phi = 0$. Уравнение (28) интегрируется стандартным образом

$$\tfrac{1}{2}\dot{\phi}^2 + \omega^2\cos\phi = \frac{H}{mL^2} \tag{29}$$

или

$$\begin{aligned} dt &= \frac{d\phi}{\omega\sqrt{2E + 2\cos\phi}}, \qquad E = \frac{H}{mgL}\\ t &= \frac{1}{\omega}\int^{\phi} \frac{d\varphi}{\sqrt{2E + 2\cos\varphi}}\end{aligned} \tag{30}$$

Заметим, что последний интеграл можно переписать как

$$t = \frac{\partial}{\partial E}\int^{\phi} \frac{d\varphi}{\omega}\sqrt{2E + 2\cos\varphi} = \frac{\partial}{\partial H}\int^{\phi} p d\varphi \tag{31}$$

Обратим теперь внимание на следующий факт: эллиптический интеграл в (30) с помощью очевидных замен

$$w = e^{i\phi}, \qquad \sqrt{2E + 2\cos\phi} = \sqrt{2E + w + w^{-1}} = \lambda \tag{32}$$

можно переписать как интеграл от дифференциала

$$\frac{d\phi}{\omega\sqrt{2E + 2\cos\phi}} \sim \frac{dw}{2\lambda w} = dv \tag{33}$$

по некоторому циклу на комплексной кривой

$$w + \frac{1}{w} = \lambda^2 - 2E \tag{34}$$

или

$$y^2 = (\lambda^2 - 2E)^2 - 4, \qquad y = w - \frac{1}{w} \tag{35}$$

очевидно представляющую собой эллиптическую кривую (рода $g = 1$), на которой

$$dv = \frac{dw}{2\lambda w} = \frac{d\lambda}{y} \tag{36}$$

голоморфный дифференциал (единственный – с точностью до нормировки). Этот интеграл отображает эллиптическую кривую (34), (35) в одномерный комплексный тор $\mathbb{C}/\Gamma$, где Γ – решетка натянутая на два независимых периода дифференциала dv. Из этого проистекает, что

- Лиувиллевский тор в данном случае является вещественным сечением комплексного тора – якобиана эллиптической кривой (34), (35) (в данном случае ей изоморфным);

- Интегралы действия выражаются через периоды (по замкнутым нестягиваемым циклам, т.е. элементам H_1 эллиптической кривой) дифференциала $pd\phi \sim dS$

$$dS = \lambda \frac{dw}{w}, \qquad \frac{\partial}{\partial E} dS = dv \tag{37}$$

  т.е. мероморфного дифференциала, производная которого по единственному параметру семейства кривых представляет собой голоморфный дифференциал.

И то и другое являются признаками *интегрируемой системы.*