Материалы к семинарам по матанализу
11-я неделя (27.11–01.12.2017)

Краткое содержание лекций

Лекция 13. (29.11.2017)

1. Выпуклые и вогнутые C^2-гладкие функции
2. Единственность экстремума
3. Среднее арифметическое
4. Многочлен Тейлора или тейлоровский многочлен
5. Формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано
6. Локальное исследование функций одного переменного

Примерные задачи семинаров 23 и 24

В начало занятия 23, возможно, перейдут задачи прошлой недели.

Формула Тейлора

Во всех дальнейших задачах функция, заданная формулой, не имеющей смысла в нуле, продолжается в 0 по непрерывности, если это возможно.

Задача 11.1. Найдите многочлены Тейлора в нуле степени n для следующих функций:
а) $\sin x$,
б) $\cos x$,
в) $\frac{1}{1-x}$,
г) $(1+x)^a$, $a \in \mathbb{R}$.

Задача 11.2. Запишите многочлен Тейлора степени n для функции $1/x$ в точке $x_0 = 2$.

Задача 11.3. Найдите тейлоровский многочлен степени 2 для функции $1 + 3x + 5x^2 - 2x^3$ в нуле.

Задача 11.4. Напишите разложение следующих функций по целым неотрицательным степеням переменной x до членов указанного порядка включительно:
а) $\frac{(1+x)^{10}}{(1-2x)^4(1+2x)^6}$ до члена с x^2,
б) $\sqrt{1-2x+x^2} - \sqrt[3]{1-3x+x^2}$ до члена с x^2,
в) $\sin(\sin x)$ до члена с x^3,
г) $\operatorname{tg} x$ до члена с x^4.

Задача 11.5. а) Рассмотрим многочлены Тейлора в нуле степени n функции f и степени $n-1$ ее производной f'. Докажите, что второй получается дифференцированием первого.
б) Найдите многочлен Тейлора степени n в нуле для функции $\operatorname{arctg} x$.

Задача 11.6.* Пусть для функции f многочлены Тейлора всех степеней в нуле тождественно равны нулю. Следует ли отсюда, что $f(x) \equiv 0$?

Задача 11.7. Функцию $\sqrt{1+x^2} - x$ разложите по целым неотрицательным степеням дроби $1/x$ до члена с $1/x^3$.

Задача 11.8. Что можно сказать о функции f на прямой, если $f^{(n)} \equiv 0$?

Вычисление пределов с помощью формулы Тейлора

Задача 11.9. При $x \to 0$ определите главный член вида Cx^n, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, для следующих функций:

а) $\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x}$,

б) $\frac{3}{3+x^2} - \cos x + \sin(x)\sqrt[3]{(1-x)^2} + \frac{x}{2}(x-2)$,

в) $\operatorname{tg}(\sin x) - \sin(\operatorname{tg} x)$.

Задача 11.10. Используя формулу Тейлора, найдите следующие пределы. Заметим, что эти же пределы вычислялись при помощи формулы Лопиталя в задачах 10.1 и 10.4 предыдущего листка.

а) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin nx}{\sin mx}$,

б) $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2}$,

в) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - \operatorname{tg} x}{x^3}$,

г) $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-1}{\sin x}$,

д) $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-(1+\frac{x}{2})}{\sin x^2}$,

е) $\lim_{x\to 0} \frac{(1+x^2)^{\frac{1}{3}}-1}{x^n}$, $n = 1, 2, 3$,

ё) $\lim_{x\to \infty} \frac{\sqrt{x^4-x^3}-x^2}{x}$,

ж) $\lim_{x\to \infty} \frac{\sqrt{x^6+x^5}-\sqrt[3]{x^9+x^8}}{x^2}$.

Задача 11.11. Вычислите следующие пределы, используя формулу Тейлора:

а) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sqrt[6]{x^6+x^5} - \sqrt[6]{x^6-x^5}\right)$,

б) $\lim\limits_{x\to 0+} \frac{\sin^3 x}{\sqrt[3]{1+2x^2}-\cos(2\sqrt{x})-2x}$,

в) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x}\left(\frac{1}{x} - \operatorname{ctg} x\right)$,

г) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin(\sin x) - x\sqrt[3]{1-x^2}}{x^5}$,

Локальное исследование функций одного переменного

Задача 11.12. Найдите и исследуйте критические точки функций:

а) $f(x) = \cos x + \cos 2x$

б) $f(x) = \sin x + \sin 3x$

в) $f(x) = x + \sin x$

г) $f(x) = \frac{\sin x}{x}$, $|x| < 1$

Дальнейшие задачи, вероятно, пойдут на следующую неделю.

Многочлен Тейлора сложной и обратной функции

Задача 11.13. Выразите многочлен Тейлора степени 3 в нуле для функции g через многочлен Тейлора степени 3 в нуле для функции f, при условии, что $f(0) = 0$, если:

а) $g(x) = f(\sin x)$

б) $g(x) = f(\operatorname{tg} x)$

в) $g(x) = f((1+x)^a)$

г) $g(x) = \sin(f(x))$

д) $g(x) = \operatorname{tg}(f(x))$

е) $g(x) = (1 + f(x))^a$

Задача 11.14. Выразите многочлен Тейлора степени 3 в нуле для функции $\sqrt[5]{f(x)}$ через многочлен Тейлора степени 3 в нуле для функции f, при условии, что $f(0) = 1$.

Задача 11.15. Найдите главный член в нуле следующих функций: $(x + x^2)^n$; $(\sin x)^n$.

Задача 11.16. Пусть функция f трижды дифференцируема в окрестности нуля и ноль является ее неподвижной точкой.

а) Пусть $f'(0) = 1$. Как связаны между собой главные нелинейные части в нуле отображения f и обратного ему отображения f^{-1}?

б) Предположим, что $f'(0) \neq 0$. Выразите многочлен Тейлора степени 3 функции f^{-1} через многочлен Тейлора степени 3 функции f. Зачем вводилось условие $f'(0) \neq 0$?

Задача 11.17. Пусть $D(x)$ — функция Дирихле. Можно ли приблизить функцию $\cos(D(x))$ многочленом

$$P_n(x) = 1 - \frac{D(x)^2}{2!} + \frac{D(x)^4}{4!} - \ldots + (-1)^n \frac{D(x)^{2n}}{(2n)!}?$$

Если да, то с какой точностью?

Приближенные вычисления

Задача 11.18. Для каких x с точностью до $0,00001$ справедлива формула
а) $\operatorname{tg} x = x + x^3/3$, б) $\operatorname{arctg} x = x - x^3/3$?

Задача 11.19. Вычислите приближенно а) $\sqrt[3]{30}$, б) $\arcsin 0,45$, и оцените погрешность.

Задачи посложнее

Задача 11.20*. Пусть $f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \ldots + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(x + \theta h)$, где $0 < \theta < 1$ и, кроме того, $f^{(n+1)}(x) \neq 0$. Докажите, что $\lim\limits_{h \to 0} \theta = \frac{1}{n+1}$.

Задача 11.21*. а) Пусть f- дважды непрерывно дифференцируемая функция, определенная на отрезке $[0,1]$, и удовлетворяющая соотношению $f(0) = f(1) = 0$. Пусть существует постоянная C, такая что $|f''(x)| \leq C$ для любого $x \in (0,1)$. Докажите, что $|f'(x)| \leq C/2$ для всех $x \in (0,1)$.

б)Пусть f- дважды непрерывно дифференцируемая функция, определенная на всей прямой, и $M_k = \sup\limits_{-\infty < x < \infty} |f^{(k)}(x)| < \infty$, где $k = 0, 1, 2$. Докажите неравенство $M_1^2 \leq 2M_0 M_2$.

Указание. Примените формулу Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа.