Лекция 12. Еще о производной.

1 Теорема Коши

Теорема 1 *Пусть две функции f и g дифференцируемы на одном интервале I, причем их производные одновременно не обращаются в ноль, и пусть $a, b \in I$. Тогда существует такое $c \in (a, b)$ что*

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} \tag{1}$$

при условии, что $g(b) - g(a) \neq 0$.

Доказательство Рассмотрим вспомогательную функцию

$$h(x) = (f(b) - f(a))g(x) - (g(b) - g(a))f(x).$$

Эта функция дифференцируема и имеет равные значения на концах отрезка $[a, b]$:

$$h(a) = h(b) = -f(b)g(a) - g(b)f(a).$$

Следовательно, по теореме Ролля, у нее есть критическая точка $c \in (a, b)$; $h'(c) = 0$. Но

$$h'(c) = (f(b) - f(a))g'(c) - (g(b) - g(a))f'(c).$$

Поскольку $h'(c) = 0$, получаем (1). $\square$

Геометрическая интерпретация. Две функции f и g определяют *параметрически заданную плоскую кривую*: $I \to \mathbb{R}^2, x \to (f(x), g(x))$. Теорема Коши утверждает: *для любой хорды параметрически заданной плоской кривой, вектор скорости которой* (f', g') *нигде не обращается в ноль, существует точка на дуге этой кривой с теми же концами, что и хорда, в которой касательная параллельна хорде.*

Задача 1 *Останется ли это утверждение верным, если а) вектор скорости может обращаться в ноль? б) кривая не плоская, а пространственная?*

2 Правило Лопиталя.

Теорема 2 *Если две функции f и g дифференцируемы на одном интервале I, содержащем 0, и $f(0) = g(0) = 0$, то для любой точки a этого интервала*

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} \tag{2}$$

при условии, что предел справа существует, и знаменатели не равны нулю в проколотой окрестности нуля.

Доказательство Имеем $\forall\ x \in I \setminus \{0\}\ \exists c(x) \in (0, x)$

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(c(x))}{g'(c(x))}. \tag{3}$$

При $x \to 0,\ c(x) \to 0$. Следовательно,

$$\lim_{x\to 0} \frac{f'(c(x))}{g'(c(x))} = \lim_{c\to 0} \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

По условию, предел справа существует. Теорема теперь следует из равенства (3). $\square$

3 Построение графиков.

Предыдущие теоремы имеют массу приложений и будут постоянно использоваться в курсе анализа. Одно из приложений теорем 3 и 4 лекции 11 - способ построения графиков дифференцируемых функций. Он состоит в следующем.

1. Нарисовать график производной функции, найти ее нули и точки разрыва и указать ее знаки на всех интервалах знакопостоянства.

2. Вычислить значения функции в критических точках (они называются критическими значениями функции). Поставить соответствующие точки на графике.

3. Соединить поставленные точки дугами кривых так, чтобы у них в каждой точке были касательные, горизонтальные в критических точках, и чтобы эти дуги показывали возрастание и убывание функций в соответсвии со знаком производной, найденным на первом шаге.

Этот способ можно обобщить на функции, имеющие изолированные точки разрыва и дифференцируемые на дополнении к множеству этих точек. Для этого к сказанному нужно добавить исследование функции в окрестности точек разрыва. Для рациональной функции точки разрыва - всегда полюса, то есть функция в них обращается в бесконечность. Для таких функций достаточно исследовать знак производной на интервалах, из которых состоит дополнение до множества критических точек и полюсов.

4 Локальная теорема об обратной функции.

Определение 1 *Скажем, что функция обратима в окрестности точки a, если существует такая окрестность этой точки, в которой функция имет обратную.*

Теорема 3 *Непрерывно дифференцируемая функция обратима в окрестности каждой своей некритической точки. Производные прямой и обратной функции в точках x и $f^{-1}(x)$ взаимно обратны.*

У этой теоремы есть многомерный аналог, формулируемый почти дословно - один из наиболее важных и употребимых фактов анализа.

Доказательство Пусть f - непрерывно дифференцируемая функция, и a - ее некритическая точка. По определению, $f'(a) \neq 0$. В силу непрерывности f', существует окрестность точки a - интервал I - на котором производная f' сохраняет знак. По теореме 3 лекции 11, функция f монотонна на этом интервале. По теореме 2 лекции 10, она еще и непрерывна. Оба утверждения теоремы 3 следуют теперь из теоремы 2 лекции 10. □

5 Старшие производные.

Производные от производных называются старшими производными.

Определение 2 *Производная порядка n функции f обозначается $f^{(n)}$ и определяется по индукции:*

$$f^{(n)} = (f')^{(n-1)}.$$

база индукции - первая производная - уже определена.

Пример 1

$$(x^n)^{(k)} = \frac{n!}{(n-k)!}x^{n-k}.$$

$$(\sin x)^{(2k)} = (-1)^k \sin x.$$

$$(\cos x)^{(2k)} = (-1)^k \cos x.$$

Определение 3 *Класс C^n - это множество всех функций, n раз дифференцируемых.*

Уже вторая производная сильно помогает в исследовании функций.

6 Локальное исследование функции по ее второй производной.

Теорема 4 *Пусть вторая производная функции в критической точке a отлична от нуля. Тогда a - точка локального минимума (максимума), если $f''(a) > 0$ (соответственно, $f''(a) < 0$).*

Доказательство Пусть $f''(a) > 0$. По теореме 3 лекции 11 для любого достаточно малого $h > 0$,

$$f'(a-h) < (f'(a) = 0) < f'(a+h).$$

Тогда, по теореме Лагранжа, для тех же h,

$$f(a-h) > f(a) < f(a+h).$$

Следовательно, a - локальный минимум функции f. Аналогично исследуется случай локального максимума. $\square$