Задачи по курсу "Дифференциальные уравнения и изомонодромные деформации", осень 2017

1. Покажите, что для всякой 1-формы ω и векторных полей X, Y выполняется
$$(i_Y \circ L_X - L_X \circ i_Y)\,\omega = i_{[X,Y]}\omega$$

2. Найдите образы векторного поля $Y = x\partial_x$ и дифференциальной формы $\omega = y\mathrm{d}y$ под действием потока
$$\xi_t : (r, \varphi) \mapsto \left(r + r\frac{\sin t}{2}; \varphi + \pi\,\mathrm{tg}\,\frac{t}{4}\right)$$
за время $t = \pi$.

3. Покажите, что формы
$$\omega_1 = -x^2\mathrm{d}x^1 + x^1\mathrm{d}x^2 + dx^3$$
$$\omega_2 = -x^4\mathrm{d}x^3 + x^3\mathrm{d}x^4 + \mathrm{d}x^5$$
задают базис $\Lambda(C) = F\langle\omega_1, \omega_2\rangle$ вполне интегрируемого распределения C в $\mathbb{R}^5$. Найдите размерность распределения и какой-либо базис $\mathcal{D}(C) = F\langle X_1, \cdots, X_k\rangle$.

4. Какое распределение в $\mathbb{R}^3$ задают формы
$$\omega_1 = \mathrm{d}x - y\mathrm{d}z$$
$$\omega_2 = \mathrm{d}x - z\mathrm{d}y$$

5. Покажите, что распределение, заданное формой $\omega = z\mathrm{d}x + z\mathrm{d}y - \mathrm{d}z$ в $\mathbb{R}^3$ удовлетворяет критерию интегрируемости Фробениуса и найдите интегральное многообразие, проходящее через точку $(0, 0, c)$.

6. Покажите, что если векторные поля $X_\alpha = \partial_\alpha + f^k_\alpha\partial_k$ коммутируют, то система уравнений $\frac{\partial y^k}{\partial x^\alpha} = f^k_\alpha(x, y)$ имеет решение.

7. Пусть SO(3) группа вращений трёхмерного пространства, а элементы L_x, L_y элементы алгебры Ли $\mathfrak{so}(3)$ отвечающие генераторам вращений вокруг осей O_x и O_y соответственно. Рассмотрим подпространство E_I касательного расслоения к SO(3) в единице
$$C_I = \{\Lambda \in T_I\mathrm{SO}(3) \simeq \mathfrak{so}(3) | \Lambda = \alpha L_x + \beta L_y,\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$$
и определим
$$C_Q = \left\{B \in T_Q\mathrm{SO}(3) | Q^{-1}B \in C_I\right\}$$
Является ли $C = \bigcup\limits_{Q \in \mathrm{SO}(3)} C_Q$ интегрируемым распределением в $T\mathrm{SO}(3)$?

8. Вычислите явно первые два порядка в разложении в ряд по ε
$$\left[a^1\big(x + \varepsilon b(x)\big)\frac{\partial}{\partial\big(x + \varepsilon b(x)\big)^1} + a^n\big(x + \varepsilon b(x)\big)\frac{\partial}{\partial\big(x + \varepsilon b(x)\big)^n}\right] -$$
$$- \left[a^1(x)\frac{\partial}{\partial x^1} + \cdots + a^n(x)\frac{\partial}{\partial x^n}\right]$$

где $x, a(x), b(x) \in \mathbb{R}^n$. Дайте инвариантную бескоординатную формулировку результата для полей $A = a^k \partial_k$ и $B = b^l \partial_l$.

9. Найдите перемешивающие симметрии распределения, заданного уравнением:

$$y^{(k+1)} + A_k(x) y^{(k)} + \ldots + A_0(x) y = g(x),$$

и постройте по ним полную систему первых интегралов.

10. Найдите перемешивающие симметрии распределения, заданного уравнением:

$$a y^2 y''' + b y y' y'' + c (y')^3 = 0, \quad a, b, c \in \mathbb{R}, \quad a \neq 0,$$

и постройте по ним полную систему первых интегралов. (*Подсказка: перемешивающие симметрии порождены функциями* $f_1 = y_0$, $f_2 = y_0 - x y_1$, $f_3 = -y_1$.)