

# Классическая теория поля 2017.

## Листок 5. Электромагнитное поле II:

Свободные электромагнитные волны. Поля в присутствии источников.

Срок сдачи: до 17 декабря

1. Рассмотрим 4-вектор потенциала электромагнитного поля  $A^\mu(x) = (A^0, \vec{A})$  в кулоновской калибровке  $A^0(x) = 0$ ,  $\operatorname{div} \vec{A} = 0$ . Уравнения Максвелла эволюции свободного электромагнитного поля допускают решение в виде плоской монохроматической волны

$$\vec{A}(x) = \operatorname{Re} \left( \vec{B}_0 \exp(-ik \cdot x) \right),$$

где  $\vec{B}_0(x)$  — постоянный 3-вектор (вообще говоря, с комплексными компонентами), а  $k^\mu = (k^0, \vec{k})$  — постоянный 4-вектор.

- Найдите выражения для напряженностей электрического и магнитного полей  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$ , отвечающих такому вектор-потенциалу.
- Найдите все соотношения между векторами  $\vec{k}$ ,  $\vec{B}_0$ ,  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$ , следующие из калибровочных условий и уравнений Максвелла. Докажите, в частности, что напряженности электрического и магнитного полей  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  ортогональны друг другу и вектору  $\vec{k}$ .
- Докажите, что в общем случае в любой фиксированной точке пространства векторы  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  вращаются с постоянной угловой скоростью в плоскости перпендикулярной вектору  $\vec{k}$ , а их концы описывают эллипсы (так называемая, эллиптически поляризованная волна). При каких условиях на  $\vec{B}_0$  получаются волны круговой и линейной поляризации?
- Вычислите вектор Пойнтинга и покажите, что энергия плоской волны распространяется со скоростью света в направлении вектора  $\vec{k}$ .

2. Найдите пространственную плотность заряда, отвечающую сферически симметричному потенциалу следующего вида (потенциал Юкавы):

$$\phi(\vec{r}) = \frac{e^{-r/a}}{r}, \quad r = |\vec{r}|,$$

где  $a$  — постоянный положительный параметр.

3. В пространстве Минковского  $M_3$  найдите запаздывающую функцию Грина для уравнения движения свободного безмассового скалярного поля:

$$\square G(x) = \delta^{(3)}(x), \quad G(x) \equiv 0 \quad \text{при} \quad x^0 < 0.$$

Здесь  $\square = \eta^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu$ , а  $\eta^{\mu\nu} = \operatorname{diag}(1, -1, -1)$  — метрический тензор в пространстве  $M_3$ .

4. а) Заряд  $q$  колеблется вдоль оси  $Oz$  вокруг начала координат по закону

$$z(t) = R \cos(\omega t).$$

Полагая  $R\omega \ll c$  ( $c$  — скорость света), найдите поле этого заряда на расстояниях  $r \gg c/\omega$  (волновая зона) в первом исчезающем порядке по отношению  $v/c$ , где  $v$  — скорость заряда.

б) В предположениях предыдущего пункта найдите поле в волновой зоне для заряда, равномерно вращающегося в плоскости  $xOy$  вокруг начала координат по закону:

$$x(t) = R \cos(\omega t), \quad y(t) = R \sin(\omega t).$$

6. Точечный заряд  $-q$  движется по окружности радиуса  $R$  вокруг закрепленного точечного заряда  $q > 0$ . Период обращения равен  $T$ . Определите среднюю за период обращения интегральную мощность дипольного излучения этой системы (то есть, суммарную мощность дипольного излучения по всем направлениям).

7\*. В трехмерном пространстве Минковского с метрическим тензором  $\eta^{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1)$  задано действие для вещественного векторного поля  $A_\mu(x)$ , взаимодействующего с комплексным скалярным полем  $\phi$

$$S[A] = \int_{M_3} d^3x \left[ \varepsilon^{\mu\nu\lambda} A_\mu \partial_\nu A_\lambda + \overline{\nabla^\mu \phi} \nabla_\mu \phi \right], \quad \nabla_\mu = \partial_\mu - iqA_\mu,$$

где  $\varepsilon^{\mu\nu\lambda}$  — полностью антисимметричный тензор третьего ранга, нормированный условием  $\varepsilon^{012} = 1$ .

- а) Инвариантно ли действие относительно каких-либо калибровочных преобразований полей?
- б) Напишите уравнения движения полей  $\phi$  и  $A_\mu$ .
- в) Найдите тензор энергии-импульса этой системы.