21.11.2017	Классическая теория поля	= 1 =

Лекция № 11

На прошлых занятиях мы изучили взаимодействие точечной заряженной частицы с внешним полем, которое оказывает влияние на движение частицы, но само от этого движения не меняется, являясь заданной функцией координат пространства Минковского x^μ. Также мы получили действие, описывающее динамику свободного электромагнитного поля.

Целью ~~[illegible]~~ данной лекции будет изучение электродинамики точечной частицы с динамическим же электромагнитным полем. Соответствующее действие имеет вид:

$$S[A,x] = -mc\int_\gamma \sqrt{dx^\mu dx_\mu} - \frac{1}{16\pi c}\int_\Omega d^4_x F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} - \frac{e}{c}\int_\gamma A^\mu dx_\mu .$$

=2=

Здесь γ - мировая линия движения частицы в пространстве Минковского.

Выберем параметризацию γ посредством времени $t = \frac{x^0}{c}$ в некоторой фиксированной системе отсчета. Тогда действие примет вид:

$$S = -mc^2 \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{1 - \frac{\dot{\vec{x}}^2}{c^2}}\, dt - \frac{1}{16\pi c} \int_{\Omega} d^4x\, F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} -$$

$$- \frac{e}{c} \int_{t_1}^{t_2} A^{\mu}(\vec{x}(t), t) \frac{dx_\mu}{dt}\, dt.$$

Здесь $\Omega = [ct_1, ct_2] \times \mathbb{R}^3$.

Получение уравнений движения из такого действия затруднено тем обстоятельством, что слагаемое, отвечающее квадратичной части по полям A^μ содержит $\int$ по всей области Ω, а слагаемое, описывающее взаимодействие частицы и поля

$$S_{int} = -\frac{e}{c}\int\limits_{t_1}^{t_2} A^\mu(\vec{x}(t), t)\frac{dx_\mu}{dt} \text{ —}$$

содержит значения полей только на траектории (одномерное подмногообразие) $\gamma \subset \Omega$. Поэтому прежде всего перейдём в S_{int} к интегрированию по ~~всей~~ всей области Ω. Для этого воспользуемся свойством трёхмерной δ-функции: Если кривая $\vec{x}(t) \subset V \subset R^3$, то

$$\int\limits_V d^3y\, \delta^{(3)}(\vec{y} - \vec{x}(t))\, \Phi(\vec{y}) = \Phi(\vec{x}(t))$$

для $\forall$ непрерывной $\Phi(\vec{y})$.

Напомним, что $\delta^{(3)}(\vec{x}) = \delta(x^1)\delta(x^2)\delta(x^3)$.

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}$$

Пользуясь этим свойством, получаем:

$$\frac{e}{c}\int\limits_{t_1}^{t_2} dt\, A_\mu(\vec{x}(t), t)\frac{dx^\mu(t)}{dt} = \frac{e}{c}\int\limits_{t_1}^{t_2} dt \int\limits_{R^3} d^3x\, \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{x}(t)) \cdot A^\mu(\vec{x}, t)\frac{dx_\mu(t)}{dt} =$$

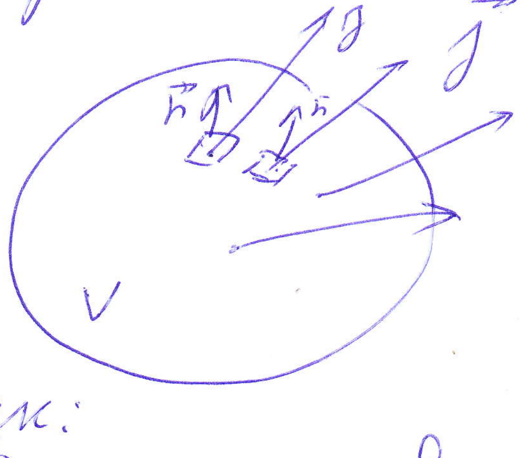
$$= \left\{ dt = \frac{dx^0}{c} \Rightarrow dt\, d^3x = \frac{1}{c} d^4x \right\} =$$

$$= \int_\Omega \frac{d^4x}{c}\Big(e\delta^{(3)}(\vec x-\vec x(t))A^0(\vec x,t) - \frac{e}{c}\dot{\vec x}(t)\,\delta^{(3)}(\vec x-\vec x(t))\,\vec A(\vec x,t)\Big)$$

Заметим, что $\rho(\vec x,t)=e\,\delta^{(3)}(\vec x-\vec x(t))$ – это плотность заряда точечной частицы, $\vec j(\vec x,t)=e\,\dot{\vec x}(t)\,\delta(\vec x-\vec x(t))=\dot{\vec x}(t)\rho(\vec x,t)$ – это <u>плотность тока</u> заряженной частицы. Смысл этой величины:

$\vec n$ – нормаль к площадке $d\sigma$, тогда

$(\vec j\cdot\vec n)\,d\sigma=\frac{dq}{dt}$ – скорость протекания заряда через $d\sigma$. Если площадка не ∞ малая, то надо вычислить поверхностный интеграл:



$\oint_{\partial V}(\vec j\vec n)\,d\sigma=\frac{dq}{dt}$ – скорость изменения заряда в объеме V.

Итак:

$$\frac{e}{c}\int_{t_1}^{t_2}dt\,A^\mu\frac{dx_\mu}{dt}=\frac{1}{c^2}\int_\Omega d^4x\,\big(c\rho(x)A^0(x)-\vec j(x)\vec A(x)\big).$$

Введём 4-вектор

$$j^\mu(x) = (c\rho(x), \vec{j}(x))$$

Тогда для взаимодействия зарядов с полем получим следующее выражение:

$$S_{int} = -\frac{e}{c}\int_\gamma A^\mu dx_\mu = -\frac{1}{c^2}\int d^4x\, A^\mu(x) j_\mu(x).$$

Это выражение мы получили в предположении

$$\begin{cases} j^0 = c\rho = ce\,\delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{x}(t)) \\ \vec{j} = \dot{\vec{x}}\rho = e\dot{\vec{x}}(t)\,\delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{x}(t)), \end{cases}$$

верном для точечной частицы, но оно справедливо и в самом общем случае пространственного расположения плотности заряда и плотности тока.

Если теперь проварьировать действие по полям A^μ получим уравнения Максвелла (вторую пару), описывающую взаимодействие с зарядами:

$$\frac{1}{4\pi c}\partial_\mu F^{\mu\nu} - \frac{1}{c^2} j^\nu(x) = 0$$

$$\boxed{\partial_\mu F^{\mu\nu} = \frac{4\pi}{c} j^\nu}$$

Заметим, что $\partial_\nu \partial_\mu F^{\mu\nu} \equiv 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ для совместности этих уравнений требуется, чтобы

$$\partial_\mu j^\mu(x) = 0, \text{ или}$$

$$\boxed{\frac{\partial \rho(t,\vec{x})}{\partial t} + (\vec{\nabla}\cdot\vec{j}) = 0} \quad (\star)$$

Это так называемое уравнение непрерывности для 4-вектора тока j^μ, оно выражает закон сохранения и изменения <u>электрического заряда</u>.

Проинтегрируем $(\star)$ по некоторой области $V \subset R^3$:

$$\frac{d}{dt}\int_V \rho(t,\vec{x})\,d^3x = -\int_V (\vec{\nabla}\cdot\vec{j})\,d^3x$$

$\int_V \rho(t,\vec{x})\,d^3x = Q_V(t)$ – полный заряд, содержащийся в объёме V (т.к. $\rho(t,\vec{x})$ – плотность заряда).

Правую часть преобразуем в поверхностный интеграл с помощью т. Гаусса:

$$\frac{dQ(t)}{dt} = -\oint_{\partial V} (\vec{j}\,\vec{n})\,d\sigma$$

<u>внешняя</u> нормаль к ∂V.

Эта формула имеет простую физическую интерпретацию: заряд в объёме V может измениться только в случае ненулевого потока заряда через поверхность ∂V и скорость изменения равна полному потоку с обратным знаком.

Замечание

Ток j^μ, порождённый движением точечного заряда удовлетворяет уравнению непрерывности ($\cancel{A}$). Действительно:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = e\frac{\partial}{\partial t}\delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{x}(t)) = -e\,\dot{\vec{x}}^k \left.\frac{\partial \delta^{(3)}(\vec{r})}{\partial r^k}\right|_{\vec{r}=\vec{x}-\vec{x}(t)}$$

$$\vec{\nabla}\vec{j} = \partial_k j^k = e\,\dot{\vec{x}}^k \partial_k \delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{x}(t)) =$$

$$= e\,\dot{\vec{x}}^k \left.\frac{\partial \delta^{(3)}(\vec{r})}{\partial r^k}\right|_{\vec{r}=\vec{x}-\vec{x}(t)}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + (\vec{\nabla}\cdot\vec{j}) = 0.$$

Перейдём к полям $\vec{E}$ и $\vec{H}$.

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \frac{4\pi}{c} j^\nu \Rightarrow \boxed{\begin{aligned} &(\vec{\nabla}\cdot\vec{E}) = 4\pi\rho(t,\vec{x}) \\ &[\vec{\nabla}\times\vec{H}] = \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}\vec{j} \end{aligned}}$$

Это пара динамических уравнений Максвелла. Вместе с первой парой

$$\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{H}\right)=0$$

$$\left[\vec{\nabla}\times\vec{E}\right]=-\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{H}}{\partial t}$$

они образуют полную систему уравнений, описывающую взаимодействие электро-магнитного поля и заданных плотностей заряда $\rho(t,\vec{x})$ и плотностей тока $\vec{j}(t,\vec{x})$.

Рассмотрим теперь вопрос об энергии электро-магнитного поля.

Мы могли бы решить этот вопрос, воспользовавшись теоремой Нётер, как мы поступили для свободного скалярного поля: действие для полей инвариантно относительно подгруппы трансляций $x^\mu \mapsto x^\mu + a^\mu \Rightarrow$ Нётеровский ток, появившийся от инвариантности при временных трансляциях, должен выражать плотность энергии и плотность потока энергии, а токи, появляющиеся вследствие инвариантности относительно пространственных

трансляций, должны выра- =9=
жать плотность импульса поля
и плотность потока импульса.

Однако, здесь есть тонкость, которая
не проявилась в модели скалярного поля
вследствие ее большой простоты.
Дело в том, что выражение для токов,
даваемое теоремой Нётер, не однозначно.
Нётеровский ток на уравнениях дви-
жения удовлетворяет уравнению:

$$\partial_\mu J^\mu_a = 0$$

Если удастся подобрать 4-вектор
S^μ_a, который ~~[illegible]~~
имеет тождественно равную нулю
4-дивергенцию: $\partial_\mu S^\mu \equiv 0$, то выраже-
ние $J^\mu_{new} = J^\mu_a + S^\mu_a$ тоже
удовлетворяет равенству

$$\partial_\mu J^\mu_{new} = \partial_\mu J^\mu = 0$$

и тоже ~~может~~ может использоваться
для выражения плотностей и потоков
сохраняющихся величин. Эта ситуа-
ция имеет простую физическую интерпре-
тацию:

Дело в том, что непосредственно плотность какой-либо величины в точке пространства не измеряется на опыте. Всегда измеряется сама величина (в малом объеме), т. е. $\int\rho d^3x$, и затем в качестве плотности в точке принимается $\frac{1}{V}\int\limits_V \rho d^3x$ (так определяется плотность вещества, плотность энергии и т. п.). Но при вычислении $\int\limits_V \rho d^3x$ к выражению ρ можно, в принципе, добавить слагаемые, которые обращаются в нуль при интегрировании. Так что, фактически, вопрос о том, что считать плотностью некоей распределенной физической наблюдаемой, это вопрос о физической модели и разумной достаточности.

Поэтому мы отложим построение тензора энергии-импульса с помощью теоремы Нётер до следующей лекции, а сейчас обратимся к выводу энергии поля, основанному на простых физических соображениях. Этот способ был предложен Дж. Пойнтингом в 1884 году.

Когда мы рассматривали свободную релятивистскую частицу с Лагранжианом
$$L = -mc^2\sqrt{1-\frac{\dot{\vec{x}}^2}{c^2}},$$
мы получили выражения для сохраняющихся энергии и импульса частицы:
$$\mathcal{E} = \dot{\vec{x}}\frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{x}}} - L = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{\dot{\vec{x}}^2}{c^2}}}$$
$$\vec{P} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{x}}} = \frac{m\dot{\vec{x}}}{\sqrt{1-\dot{\vec{x}}^2/c^2}}$$

Законы сохранения имели вид $\frac{d\mathcal{E}}{dt}=0$, $\frac{d\vec{p}}{dt} = 0$.

При взаимодействии с электромагнитным полем энергия и импульс частицы не сохраняются, но должна сохраняться полная энергия системы частица + поле, и полный импульс этой системы.

Поэтому идея заключается в следующем: найти, как меняется энергия частицы и выразить это изменение в терминах поля. Тогда это выражение,

взятое с противоположным знаком, = 12 =
и будет изменением энергии поля
(выражение которой мы пока не
знаем и хотим определить).
Итак, $\mathcal{E}_ч = \dfrac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{\dot{\vec{x}}^2}{c^2}}}$ – энергия частицы.

$$\frac{d\mathcal{E}_ч}{dt} = \frac{m\dot{\vec{x}}\frac{d\dot{\vec{x}}}{dt}}{\left(1-\frac{\dot{\vec{x}}^2}{c^2}\right)^{3/2}} = \dot{\vec{x}}\frac{d\vec{p}}{dt}$$

Последнее равенство легко получить,
учитывая выражение для $\vec{p} = \dfrac{m\dot{\vec{x}}}{\sqrt{1-\frac{\dot{\vec{x}}^2}{c^2}}}$.

Для частицы, взаимодействующей с
полем мы получали такое уравнение
движения:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = e\vec{E} + \frac{e}{c}[\dot{\vec{x}}\times\vec{H}] = \vec{F}_{лоренца}.$$

Поскольку $(\dot{\vec{x}}\cdot[\dot{\vec{x}}\times\vec{H}]) = 0$, имеем

окончательно: $\dfrac{d\mathcal{E}_ч}{dt} = e(\dot{\vec{x}}\cdot\vec{E})$.

Таким образом, совершает ненулевую

работу и меняет энергию частицы только электрическая компонента $\vec{E}$ электромагнитного поля. Магнитное поле $\vec{H}$ работы не совершает, т.к. вызываемая им сила $\frac{e}{c}[\dot{\vec{x}} \times \vec{H}]$ в $\forall$ момент $\perp$ $\dot{\vec{x}}$ и $\Rightarrow$ $\perp$ элементарному перемещению $d\vec{x} = \dot{\vec{x}}\,dt$.

Умножим обе части на $\delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{x}(t))$:

$$\delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{x}(t)) \frac{d\mathcal{E}_r}{dt} = \Big(\underbrace{e\,\delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{x}(t))\,\dot{\vec{x}}}_{\vec{j}(\vec{x},t)} \cdot \vec{E}\Big) =$$

$$= (\vec{j}(x) \cdot \vec{E})$$

Ток $\vec{j}$ выразим через поле $\vec{E}$ и $\vec{H}$ из уравнения Максвелла:

$$[\vec{\nabla} \times \vec{H}] = \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}\vec{j} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{j}(x) = \frac{c}{4\pi}[\vec{\nabla} \times \vec{H}] - \frac{1}{4\pi}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\vec{j} \cdot \vec{E}) = \frac{c}{4\pi}\left(\vec{E} \cdot [\vec{\nabla} \times \vec{H}]\right) - \frac{1}{4\pi}\left(\vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right)$$

Рассмотрим первое слагаемое:

$$\frac{c}{4\pi}\left(\vec{E} \cdot [\vec{\nabla} \times \vec{H}]\right) = \frac{c}{4\pi} E^i \varepsilon^{ijk} \partial_j H^k =$$

$$\equiv \frac{c}{4\pi}\partial_j\left(\varepsilon^{ijk}E^iH^k\right)-\frac{c}{4\pi}\varepsilon^{ijk}(\partial_j E^i)H^k = =K=$$

$$= -\frac{c}{4\pi}\partial_j\left(\varepsilon^{jik}E^iH^k\right)+\frac{c}{4\pi}H^k\left(\varepsilon^{kji}\partial_j E^i\right)=$$

антисимметрия ε

$$= -\frac{c}{4\pi}\left(\vec{\nabla}\cdot[\vec{E}\times\vec{H}]\right)+\frac{c}{4\pi}\left(\vec{H}\cdot[\vec{\nabla}\times\vec{E}]\right)$$

Согласно уравнению Максвелла,

$$\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{H}}{\partial t} \Rightarrow$$

$$\frac{c}{4\pi}\left(\vec{E}\cdot[\vec{\nabla}\times\vec{H}]\right) = -\frac{c}{4\pi}\left(\vec{\nabla}\cdot[\vec{E}\times\vec{H}]\right)-\frac{1}{4\pi}\vec{H}\frac{\partial\vec{H}}{\partial t}$$ и

для $(\vec{j}\cdot\vec{E})$ получаем следующее:

$$\left(\vec{j}(x)\vec{E}\right) = -\frac{c}{4\pi}\left(\vec{\nabla}\cdot[\vec{E}\times\vec{H}]\right)-\frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\vec{H}^2+\vec{E}^2}{2}\right).$$

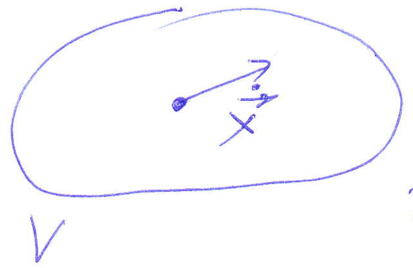
$\boxed{O}$ $\vec{S} = \frac{c}{4\pi}[\vec{E}\times\vec{H}]$ – <u>вектор Пойнтинга.</u>

Мы получили:

$$\delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{x}(t))\frac{d\mathcal{E}_t}{dt}+\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\vec{E}^2+\vec{H}^2}{8\pi}\right) = -(\vec{\nabla}\cdot\vec{S}).$$

Проинтегрируем обе части по объёму $V\subset\mathbb{R}^3$, <u>содержащему</u> частицу:

$$\frac{d\mathcal{E}_z}{dt} + \frac{d}{dt}\int_V d^3x \left(\frac{\vec{E}^2+\vec{H}^2}{8\pi}\right) = -\oint_{\partial V} (\vec{S}\,\vec{n})\,d\sigma \qquad (\star\star)$$



Логично интерпретировать величину $\frac{\vec{E}^2+\vec{H}^2}{8\pi}$ как плотность энергии электромагнитного поля, тогда величина

$$\mathcal{E}_z + \int_V d^3x \left(\frac{\vec{E}^2+\vec{H}^2}{8\pi}\right)$$

есть энергия системы частица + поле, заключённая в объёме V. Соотношение $(\star\star)$ показывает, что эта энергия меняется благодаря потоку вектора Пойнтинга $\vec{S}$ через границу объёма ∂V.

Отсюда интерпретация:

$$\vec{S} = \frac{c}{4\pi}\left[\vec{E}\times\vec{H}\right]$$ – плотность потока энергии электромагнитного поля.

Вновь напомним о неоднозначности наших формул. Мы выразим производную по времени от энергии частицы $\frac{d\mathcal{E}_r}{dt}$ в виде 4-дивергенции:

$$(\vec{j}\cdot\vec{E}) = -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{c}{8\pi}\left(\vec{E}^2+\vec{H}^2\right)\right) - (\vec{\nabla}\cdot\vec{S}) =$$

$$= -\partial_\mu X^\mu, \text{ где } X^\mu = (c\rho_{\text{эл-м}}, \vec{S}).$$

Однако к X^μ можно всегда добавить выражение вида $\partial_\nu B^{\mu\nu}$ с антисимметрической $B^{\mu\nu} = -B^{\nu\mu}$ и дивергенция $\partial_\mu X^\mu$ не изменится. Мы выбираем приведённый выше вид для плотности энергии поля и плотности потока энергии из соображений простоты и естественности (т.е. строим физическую модель).

В заключение рассмотрим два примера.

1° Плоская электромагнитная волна

Это хорошее приближение для описания поля удалённого источника.

На прошлой лекции мы получили:

$$|\vec{E}| = |\vec{H}| \qquad \vec{H} = [\vec{n}\times\vec{E}]$$

$$\vec{E}\perp\vec{n}.$$

Плотность энергии

$$\rho_{\text{эл-м}} = \frac{\vec{E}^2 + \vec{H}^2}{8\pi} = \frac{\vec{E}^2}{4\pi} = \frac{\vec{H}^2}{4\pi}$$

Плотность потока энергии:

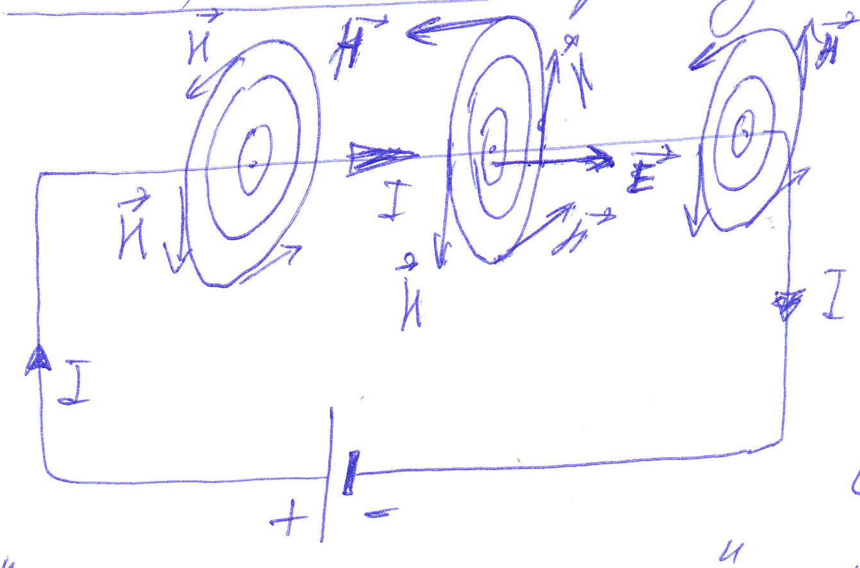
$$\vec{S} = \frac{c}{4\pi}\left[\vec{E}\times\vec{H}\right] = \frac{c}{4\pi}\left[\vec{E}\times[\vec{n}\times\vec{E}]\right] =$$

$$= \frac{c}{4\pi}\vec{n}\cdot(\vec{E}\cdot\vec{E}) - \frac{c}{4\pi}\vec{E}\,\underbrace{(\vec{n}\cdot\vec{E})}_{0,\ \text{т.к. } \vec{E}\perp\vec{n}} =$$

$$= c\,\vec{n}\,\frac{|\vec{E}|^2}{4\pi} = \underline{c\,\vec{n}\,\rho_{\text{эл-м}}}.$$

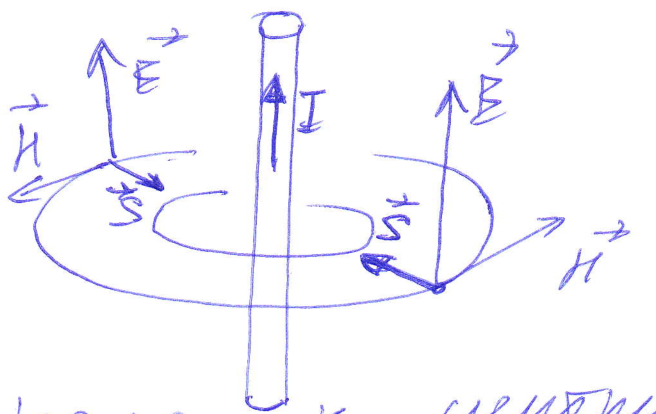
Видно, что энергия распространяется в направлении $\vec{n}$ со скоростью света c.

② Проводник с ненулевым сопротивлением, по которому течёт ток.



Благодаря ненулевому сопротивлению вдоль проводника существует "падение потенциала" – т.е. ненулевой градиент $\vec{\nabla}A^0 \Rightarrow$ ненулевое поле $\vec{E}$.

Силовые линии магнитного поля – концентрические окружности вокруг проводника:



Вектор $\vec{S} = \frac{c}{4\pi}[\vec{E} \times \vec{H}]$ направлен по радиусу силовых линий магнитного поля к центру проводника.

Таким образом существует поток энергии поля из пространства вокруг проводника внутрь него. Этот поток компенсирует потери энергии электронов (заряженных частиц), которые движутся внутри проводника и нагревают его в процессе столкновений с атомами металла проводника (сами электроны при этом теряют кинетическую энергию).