14.11.2017 | Классическая теория поля

Лекция № 10

Основная цель данной лекции — ввести динамику для поля $A^\mu(x)$. Это означает, что мы должны построить функционал действия для $A^\mu(x)$ и получить уравнения движения для полей A^μ из вариационного принципа (получить уравнения Эйлера-Лагранжа).

При выборе действия мы будем руководствоваться следующими требованиями:

- Действие $S[A]$ должно быть Пуанкаре-inv и калибровочно инвариантным. Если требование Пуанкаре-инвариантности уже привычно, то калибровочная инвариантность — новое требование. Оно обеспечивает зависимость ~~[illegible]~~ динамики от физически наблюдаемых величин $\vec{E}$ и $\vec{H}$, которые, как мы выяснили в прошлой лекции, одни и те же для целого класса эквивалентности полей A^μ.

• Действие должно быть квадратично по полям A^μ и зависеть не более, чем от первых производных по координатам пространства Минковского. Это обеспечивает линейность уравнений поля в свободном случае (когда $e = 0$), что, в свою очередь, приводит к выполнению принципа суперпозиции (сумма решений полевых уравнений — тоже решение), хорошо подтвержденного на опытах с электро-магнитными волнами. Зависимость от первых производных даст уравнения поля не выше второго порядка по производным (волновое уравнение).

Хорошим кандидатом на роль действия $S[A]$, очевидно удовлетворяющим обоим требованиям, является выражение $S[A] \sim \int\limits_{\Omega} d^4x\, F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}$.

$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$ — калибровочно инвариантный тензор второго ранга, зависящий только от первых производных от полей A^μ.

Заметим, что требование калибровочной инвариантности не позволяет добавлять к лагранжевой плотности $F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$ выражения вида $A_\mu A^\mu$, $(\partial_\mu A^\mu)^2$ и т.д.

Однако, кроме $F^{\mu\nu}$ имеется ещё один тензор второго ранга:

$$\tilde{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta}F_{\alpha\beta}$$

Здесь $\varepsilon^{\mu\nu\rho\lambda}$ полностью антисимметричный тензор 4-го ранга:

$$\varepsilon^{\mu\nu\rho\lambda} = \begin{cases} 0 & \text{если совпадают значения любой пары индексов} \\ (-1)^{|\mu\nu\rho\lambda|} & \end{cases}$$

Здесь $|\mu\nu\rho\lambda|$ — чётность перестановки $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ \mu & \nu & \rho & \lambda \end{pmatrix}$.

Таким образом, $\varepsilon^{\mu\nu\rho\lambda}$ имеет $= 4 =$ только $4! = 24$ ненулевые компоненты, равные ± 1, в зависимости от чёт-ности соответствующей перестанов-ки.

Согласно определению детерминан-та, имеем свойство (сумм. по повтор. инд.):

$$\varepsilon^{\mu\nu\rho\lambda} \Lambda^{\alpha}_{\ \mu} \Lambda^{\beta}_{\ \nu} \Lambda^{\gamma}_{\ \rho} \Lambda^{\tau}_{\ \lambda} = (\det \Lambda) \cdot \varepsilon^{\alpha\beta\gamma\tau}.$$

Поскольку мы рассматриваем только <u>ограниченные</u> преобразования Лоренца, для которых $\det \Lambda = 1$, то из вышеприведённого тождества сразу следуют соотношения:

$$1^*.\quad \Lambda^{\alpha}_{\ \mu} \Lambda^{\beta}_{\ \nu} \Lambda^{\gamma}_{\ \rho}\, \varepsilon^{\mu\nu\rho\tau} = \varepsilon^{\alpha\beta\gamma\sigma} (\Lambda^{-1})^{\tau}_{\ \sigma}$$

$$2^*.\quad \Lambda^{\alpha}_{\ \mu} \Lambda^{\beta}_{\ \nu}\, \varepsilon^{\mu\nu\gamma\tau} = \varepsilon^{\alpha\beta\rho\sigma} (\Lambda^{-1})^{\gamma}_{\ \rho} (\Lambda^{-1})^{\tau}_{\ \sigma}$$

$$3^*.\quad \Lambda^{\alpha}_{\ \mu}\, \varepsilon^{\mu\beta\gamma\tau} = \varepsilon^{\alpha\sigma\rho\nu} (\Lambda^{-1})^{\beta}_{\ \sigma} (\Lambda^{-1})^{\gamma}_{\ \rho} (\Lambda^{-1})^{\tau}_{\ \nu}$$

Эти соотношения позволяют доказать, что $\tilde{F}^{\mu\nu}(x)$ действительно тензорное поле второго ранга:

$\boxed{\text{IV}}$ При $x \mapsto x' = \Lambda x$: $x^\mu \mapsto x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\alpha x^\alpha$

$$\tilde{F}^{\mu\nu}(x) \mapsto \tilde{F}'^{\mu\nu}(x') = \Lambda^\mu{}_\alpha \Lambda^\nu{}_\beta \tilde{F}^{\alpha\beta}(x).$$

Доказательство:

$$\tilde{F}'^{\mu\nu}(x') = \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} F'_{\alpha\beta}(x') = \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} (\Lambda^{-1})^\rho{}_\alpha (\Lambda^{-1})^\sigma{}_\beta \cdot F_{\rho\sigma}(x) =$$

$$= (\text{по свойству } 2^*) = \Lambda^\mu{}_\tau \Lambda^\nu{}_\varkappa \underline{\varepsilon^{\tau\varkappa\rho\sigma} F_{\rho\sigma}(x)} =$$

$$= \Lambda^\mu{}_\tau \Lambda^\nu{}_\varkappa \tilde{F}^{\tau\varkappa}(x)$$

■

Таким образом, помимо выраже-ния $F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}$ всем требованиям удовлет-воряют ещё 2 структуры:

$$\tilde{F}^{\mu\nu}\tilde{F}_{\mu\nu} \quad \text{и} \quad \tilde{F}^{\mu\nu}F_{\mu\nu}.$$

Однако, в действительности, они не дают ничего нового по сравнению с $F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}$.

$\boxed{\text{V}}$ $\tilde{F}^{\mu\nu}\tilde{F}_{\mu\nu} \equiv -F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}$

Доказательство:

Доказательство основано на следую-щих тождествах для тензора $\varepsilon^{\mu\nu\rho\lambda}$:

$$\varepsilon^{\mu\nu\rho\lambda}\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} = -\det\begin{Vmatrix} g^{\mu\alpha} & g^{\mu\beta} & g^{\mu\gamma} & g^{\mu\delta} \\ g^{\nu\alpha} & g^{\nu\beta} & g^{\nu\gamma} & g^{\nu\delta} \\ g^{\rho\alpha} & g^{\rho\beta} & g^{\rho\gamma} & g^{\rho\delta} \\ g^{\lambda\alpha} & g^{\lambda\beta} & g^{\lambda\gamma} & g^{\lambda\delta} \end{Vmatrix} = 6 =$$

$\Downarrow$ (свертка λ и δ):

$$\varepsilon^{\mu\nu\rho\lambda}\varepsilon^{\alpha\beta\gamma}{}_{\lambda} = -\det\begin{Vmatrix} g^{\mu\alpha} & g^{\mu\beta} & g^{\mu\gamma} \\ g^{\nu\alpha} & g^{\nu\beta} & g^{\nu\gamma} \\ g^{\rho\alpha} & g^{\rho\beta} & g^{\rho\gamma} \end{Vmatrix}$$

$\Downarrow$

$$\varepsilon^{\mu\nu\rho\lambda}\varepsilon^{\alpha\beta}{}_{\rho\lambda} = -2\det\begin{Vmatrix} g^{\mu\alpha} & g^{\mu\beta} \\ g^{\nu\alpha} & g^{\nu\beta} \end{Vmatrix} =$$

$$= -2\left(g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta} - g^{\mu\beta}g^{\nu\alpha}\right)$$

$\Downarrow$

$$\varepsilon^{\mu\nu\rho\lambda}\varepsilon^{\alpha}{}_{\nu\rho\lambda} = -6\,g^{\mu\alpha}$$

$$\varepsilon^{\mu\nu\rho\lambda}\varepsilon_{\mu\nu\rho\lambda} = -24.$$

Замечание: Здесь учтено, что если $\varepsilon^{0123} = 1$, то $\varepsilon_{0123} = -1$.

Теперь получаем:

$$\tilde{F}^{\mu\nu}\tilde{F}_{\mu\nu} = \frac{1}{4}\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta}F_{\alpha\beta}\cdot\varepsilon_{\mu\nu}{}^{\rho\lambda}F_{\rho\lambda} =$$

$$= -\frac{1}{2}\left(g^{\alpha\rho}g^{\beta\lambda} - g^{\alpha\lambda}g^{\beta\rho}\right)F_{\alpha\beta}F_{\rho\lambda} =$$

$$= -\frac{1}{2}\left(F^{\rho\lambda}F_{\rho\lambda} - \underline{F^{\lambda\rho}}F_{\rho\lambda}\right) = -F^{\rho\lambda}F_{\rho\lambda}.$$

антисимметрия по λ и ρ

Это же можно получить из явной матричной формы $\tilde{F}^{\mu\nu}$:

$$\|F^{\mu\nu}\| = \begin{bmatrix} 0 & -E^1 & -E^2 & -E^3 \\ E^1 & 0 & -H^3 & H^2 \\ E^2 & H^3 & 0 & -H^1 \\ E^3 & -H^2 & H^1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \|\tilde{F}^{\mu\nu}\| = \begin{bmatrix} 0 & -H^1 & -H^2 & -H^3 \\ H^1 & 0 & E^3 & -E^2 \\ H^2 & -E^3 & 0 & E^1 \\ H^3 & E^2 & -E^1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} = 2F^{0i}F_{0i} + 2\sum_{i<j}F^{ij}F_{ij} =$$

$$= -2F^{0i}F^{0i} + 2\sum_{i<j}F^{ij}F^{ij} = -2\vec{E}^2 + 2\vec{H}^2$$

$$\tilde{F}^{\mu\nu}\tilde{F}_{\mu\nu} = -2\vec{H}^2 + 2\vec{E}^2$$

$\boxed{\text{Замечание.}}$ Видно, что переход к дуальному тензору напряжённостей $\tilde{F}^{\mu\nu}$ означает замену $E^i \to H^i$, $H^i \to -E^i$.

Отсюда легко заключить, что

$$\tilde{\tilde{F}}^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\tilde{F}_{\alpha\beta} = -F^{\mu\nu}.$$

Это же можно получить прямым вычислением с использованием тождеств для $\varepsilon^{\mu\nu\rho\lambda}$ и его сверток.

$\boxed{\text{IV}}$ $\tilde{F}^{\mu\nu}F_{\mu\nu}$ является 4-дивергенцией:

$$\tilde{F}^{\mu\nu}F_{\mu\nu} = \partial_\alpha \Phi^\alpha.$$

Доказательство:

$$\tilde{F}^{\mu\nu}F_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta}F_{\alpha\beta}\underbrace{(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)}_{\text{антисимметрия}} \equiv$$

$$= \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta}(\partial_\mu A_\nu)F_{\alpha\beta} \equiv$$

$$\equiv \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\partial_\mu(A_\nu F_{\alpha\beta}) - \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta}A_\nu\partial_\mu F_{\alpha\beta} =$$

$$= \partial_\mu\left(\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta}A_\nu F_{\alpha\beta}\right) - 2\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta}A_\nu\underbrace{\partial_\mu\partial_\alpha}_{\text{симметричная операция}} A_\beta$$

$\Rightarrow$ это слагаемое $\equiv 0$.

Итак: $\tilde{F}^{\mu\nu}F_{\mu\nu} = \partial_\mu(\Phi^\mu)$, где

$$\Phi^\mu = \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta}A_\nu F_{\alpha\beta}$$

Однако, добавление 4-дивергенции в Лагранжеву плотность не меняет уравнений движения и у нас остаётся единственный вклад в действие вида $F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$.

Выберем действие свободного электромагнитного поля в виде:

$$S[A] = -\frac{1}{16\pi c}\int\limits_{\Omega} d^4x\, F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} =$$

$$= \frac{1}{8\pi c}\int\limits_{\Omega} d^4x\, (\vec{E}^2 - \vec{H}^2).$$

Для <u>свободной</u> теории вид коэффициента $-\frac{1}{16\pi c}$ не важен, он не входит в уравнение движения. Этот коэффициент имеет значение только после введения взаимодействия с заряженными частицами (токами).

Исследуем вначале уравнения движения <u>свободного электромагнитного поля</u>.

Введём вариации полей δA^μ, тогда $F^{\mu\nu}(A+\delta A) = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu + \partial^\mu \delta A^\nu - \partial^\nu \delta A^\mu \equiv$

$$\equiv F^{\mu\nu} + \delta F^{\mu\nu}$$

Теперь для вариации действия получаем:

$$\delta S[A] \equiv \left(S[A+\delta A] - S[A]\right)\Big|_{\text{1й порядок по } \delta A} =$$

$$= -\frac{1}{8\pi c}\int\limits_\Omega F^{\mu\nu}\,\delta F_{\mu\nu}\, d^4x =$$

$$= -\frac{1}{4\pi c}\int\limits_\Omega F^{\mu\nu}\partial_\mu \delta A_\nu\, d^4x \equiv -\frac{1}{4\pi c}\int\limits_\Omega \partial_\mu\left(F^{\mu\nu}\delta A_\nu\right) d^4x +$$

$$+ \frac{1}{4\pi c}\int\limits_\Omega \delta A_\nu\, \partial_\mu F^{\mu\nu}\, d^4x .$$

Первое слагаемое (4-дивергенция по области Ω) зануляется в силу граничных условий на вариации δA_ν, а второе слагаемое приводит к уравнению Эйлера-Лагранжа для свободного поля:

$$\boxed{\partial_\mu F^{\mu\nu} = 0}$$

В терминах физических полей $\vec{E}$ и $\vec{H}$ получаем вторую пару уравнений Максвелла (динамические уравнения):

$$\nu = 0 \qquad \partial_\mu F^{\mu 0} = \partial_i F^{i0} = \frac{\partial E^1}{\partial x^1} + \frac{\partial E^2}{\partial x^2} + \frac{\partial E^3}{\partial x^3} =$$

$$\boxed{= \operatorname{div} \vec{E} = 0}$$

Для $\nu = 1, 2$ и 3 получаем 3 компоненты векторного уравнения:

$$\partial_\mu F^{\mu i} = \partial_0 F^{0i} + \partial_k F^{ki} =$$

$$= -\partial_0 E^i + \partial_k \left(-\varepsilon^{kij} H^j\right) =$$

$$= -\partial_0 E^i + \varepsilon^{ikj} \partial_k H^j =$$

$$= -\partial_0 E^i + [\vec{\nabla} \times \vec{H}]^i = 0$$

$$\boxed{\operatorname{rot} \vec{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}}.$$

Итак:

$$\boxed{\begin{aligned} &\operatorname{div} \vec{E} = (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) = 0 \\ &[\vec{\nabla} \times \vec{H}] = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{aligned}}$$

Вторая пара уравн. Максвелла для свободного поля.

Решение свободных уравнений будем искать для 4-вектора A^μ. Поскольку $F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$, то

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \Box A^\nu - \partial^\nu (\partial \cdot A) = 0$$

Напомним, что $\Box = \partial_\mu \partial^\mu$ – оператор Даламбера, $\partial \cdot A \equiv \partial_\mu A^\mu$.

Пользуясь калибровочной инвариантностью, можно упростить уравнение для A^μ.

Прежде всего, подберем такую скалярную функцию $\alpha(x)$, чтобы

$$A^0(x) + \partial^0 \alpha(x) \equiv 0.$$

$\boxed{\text{Зам.}}$ Естественно, такое условие можно выполнить только в фиксированной системе отсчета. При переходе к другой инерциальной системе отсчета это равенство <u>нарушится</u>.

В качестве $\alpha(t, \vec{x})$ можно взять, например:

$$-\alpha(t, \vec{x}) = c \int_{t_0}^{t} A^0(\tau, \vec{x})\, d\tau$$

После фиксации такой α мы от данной полевой конфигурации $A^\mu(x) = (A^0(x), \vec{A}(x))$ перейдём к $\tilde{A}^\mu(x) = (0, \tilde{\vec{A}}(x))$. Заметим, что для поля $\tilde{A}^\mu$ у нас ещё остался калибровочный произвол вида
$$\tilde{A}^\mu \to \tilde{A}^\mu + \partial^\mu \beta(\vec{x}),$$
где $\beta(\vec{x})$ — не зависит от x^0 и $\Rightarrow$ не нарушает равенства нулю компоненты $\tilde{A}^0$. Пользуясь этим остаточным произволом, можно добиться, чтобы на решениях уравнений движения было выполнено условие $\partial_i A^i = \operatorname{div} \vec{A} = 0$. Это условие "поперечности" или Кулоновское условие на $\vec{A}$. Для этого в некоторый фиксированный момент времени t_0 (напоминаем, что мы уже выбрали определённую систему отсчёта, когда "занулили" компоненту A^0, и дальше все рассуждения относятся к этой сист. отсч.)

выберем в качестве функции $\beta(\vec{x})$ решение уравнения:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{\tilde{A}}(t_0,\vec{x})+\Delta\beta(x)=0$$

$$\Delta=\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial^2}{\partial(x^i)^2}$$ — оператор Лапласа.

Тогда преобразованное поле в момент t_0 будет удовлетворять условию поперечности: $\vec{\tilde{\tilde{A}}}=\vec{\tilde{A}}+\vec{\nabla}\beta$ =>

$$\Rightarrow\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{\tilde{\tilde{A}}}\right)=\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{\tilde{A}}\right)+\Delta\beta=0.$$

(Дальше не будем для простоты рисовать $\approx$ над $\vec{A}$).

Нетрудно видеть, что это условие будет сохраняться с течением времени:

$$\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left(\partial_i A^i\right)=\partial_i\left(\partial^0 A^i\right)=\partial_i\left(\partial^0 A^i-\partial^i A^0\right)$$

Последнее равенство верно в силу того, что мы уже обеспечили $A^0(x)\equiv 0$.

Итак: $\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left(\partial_i A^i\right)=\partial_i F^{0i}=-\partial_i F^{i0}=0$ —

— в силу уравнений движения $\partial_\mu F^{\mu\nu}=0$ при $\nu=0$.

Таким образом, $\partial_i A^i(t,x)$ — не меняется с течением времени для решения уравнений движения.
$\Rightarrow$ если в $t=t_0$ $\partial_i A^i(t_0,\vec{x})=0$, то это равенство будет выполнено всегда.

Итак, будем решать уравнение Максвелла в "Кулоновской калибровке":

$$A^\mu(x)=(0,\vec{A}(x)),\text{ где }(\vec{\nabla}\cdot\vec{A})=0.$$

В этой калибровке:

$$\partial\cdot A=\partial_\mu A^\mu=\partial_0 A^0+\partial_i A^i\equiv 0,\text{ и }\Rightarrow$$

$$\Box A^\mu-\partial^\mu(\partial\cdot A)=0\text{ превратится}$$

в $\begin{cases}\Box\vec{A}=0 & \text{— волновое уравнение.}\\(\vec{\nabla}\cdot\vec{A})=0.\end{cases}$

Среди множества его решений мы рассмотрим важный класс так называемых <u>плоских волн</u>

Пусть $\vec{f}(u) = \begin{pmatrix} f^1(u) \\ f^2(u) \\ f^3(u) \end{pmatrix}$ - дважды непрерывно дифференцируемая векторная функция одного вещественного аргумента: $\vec{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$.

Зафиксируем в $\mathbb{R}^3$ единичный вектор $\vec{n}$: $(\vec{n} \cdot \vec{n}) = 1$. Тогда

$$\vec{A}(t, \vec{x}) = \vec{f}\left(t - \frac{(\vec{n} \cdot \vec{x})}{c}\right) -$$

решение системы

$$\Box \vec{A} = 0, \quad \operatorname{div} \vec{A} = 0 \text{ при}$$

дополнительном условии на $\vec{f}$:

$$\left(\vec{n} \cdot \frac{d\vec{f}}{du}\right) = 0 \quad \forall u.$$

Это утверждение проверяется несложными вычислениями:

$$\Box = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \vec{\nabla}^2$$

$$\frac{\partial^2 \vec{f}}{c^2 \partial t^2} = \frac{1}{c^2}\frac{d^2 \vec{f}}{du^2}\Bigg|_{u = t - \frac{(\vec{x} \cdot \vec{n})}{c}}$$

$$\frac{\partial (\vec{x} \cdot \vec{n})}{\partial x^k} = n^k \Rightarrow \quad \vec{\nabla}(\vec{x} \cdot \vec{n}) = \vec{n} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla})(\vec{x} \cdot \vec{n}) = (\vec{n} \cdot \vec{n}) = 1$$

Поэтому $\vec{\nabla}^2 \vec{f}\left(t-\frac{(\bar{x}\bar{n})}{c}\right)=\frac{1}{c^2}\frac{d^2\vec{f}}{du^2}\Big|_{u=t-\frac{\vec{n}\vec{x}}{c}}$ =17=

Сравнивая это с $\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{f}}{\partial t^2}$, видим, что $\Box\vec{\vec{f}}=0$.

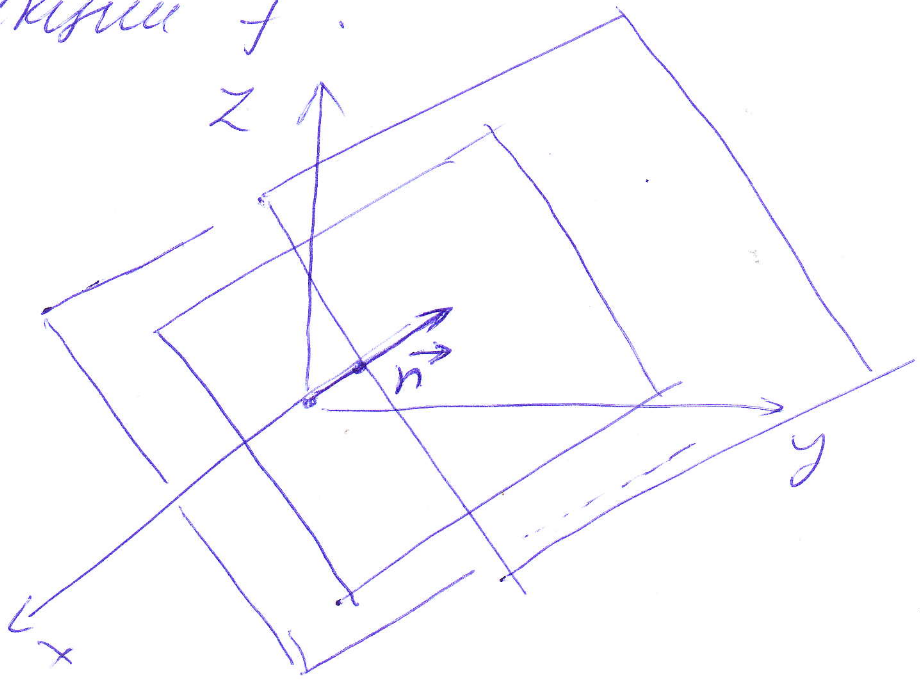
$\operatorname{div}\vec{A}=\vec{\nabla}\cdot\vec{f}=-\frac{1}{c}\left(\vec{n}\cdot\frac{d\vec{f}}{du}\right)\Big|_{u=t-\frac{(\bar{x}\bar{n})}{c}}=0$ в

силу дополнительного условия на $\vec{f}$.

Решении $\vec{A}=\vec{f}\left(t-\frac{(\bar{x}\bar{n})}{c}\right)$ называется плоской волной, так как вектора $\vec{\vec{A}}$ постоянны на плоскостях в $\mathbb{R}^3$:

$$\bar{x}\bar{n}-tc=u_0=\text{const}$$

(плоскость $\perp\vec{n}$), так как это поверхности постоянного аргумента функции $\vec{f}$.



Видно, что с изменением t эти

плоскости перемещаются в направлении $\vec{n}$ параллельно самим себе со скоростью c:

$$(\vec{x}_1 \cdot \vec{n}) - t_1 c = u_0 = (\vec{x}_2 \vec{n}) - t_2 c$$

$$\Downarrow$$

$$\left(\frac{(\vec{x}_2 - \vec{x}_1)}{t_2 - t_1} \cdot \vec{n}\right) = c$$

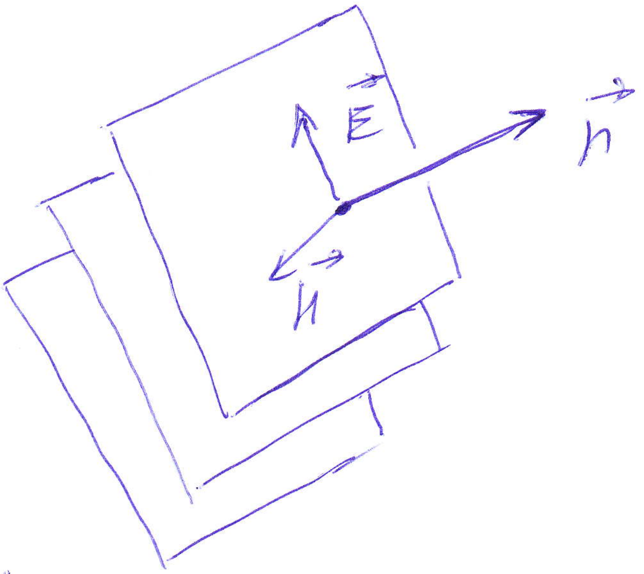
Найдём теперь выражение для $\vec{E}$ и $\vec{H}$:

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} A^0 - \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\frac{1}{c}\frac{d\vec{f}}{du}\bigg|_{u = t - \frac{\vec{x}\vec{n}}{c}}$$

$$\vec{H} = \vec{\nabla} \times \vec{A} = -\frac{1}{c}\left[\vec{n} \times \frac{d\vec{f}}{du}\bigg|_{u = t - \frac{\vec{x}\vec{n}}{c}}\right] = [\vec{n} \times \vec{E}].$$

Поле $\vec{H} \perp \vec{n}$ и $\vec{E}$, и, кроме того, поле $\vec{E} \perp \vec{n}$: $(\vec{n} \cdot \vec{E}) = -\frac{1}{c}\left(\vec{n} \cdot \frac{d\vec{f}}{du}\right) = 0$. (условие поперечности).

Таким образом, в плоской волне $\vec{E}$ и $\vec{H}$ ортогональны $\vec{n}$ - направлению распространения волны, вектора $(\vec{n}, \vec{E}, \vec{H})$ образуют <u>правую</u> тройку: $\vec{H} = [\vec{n} \times \vec{E}]$ и, кроме того, из этого равенства следует $|\vec{H}| = |\vec{E}|$:



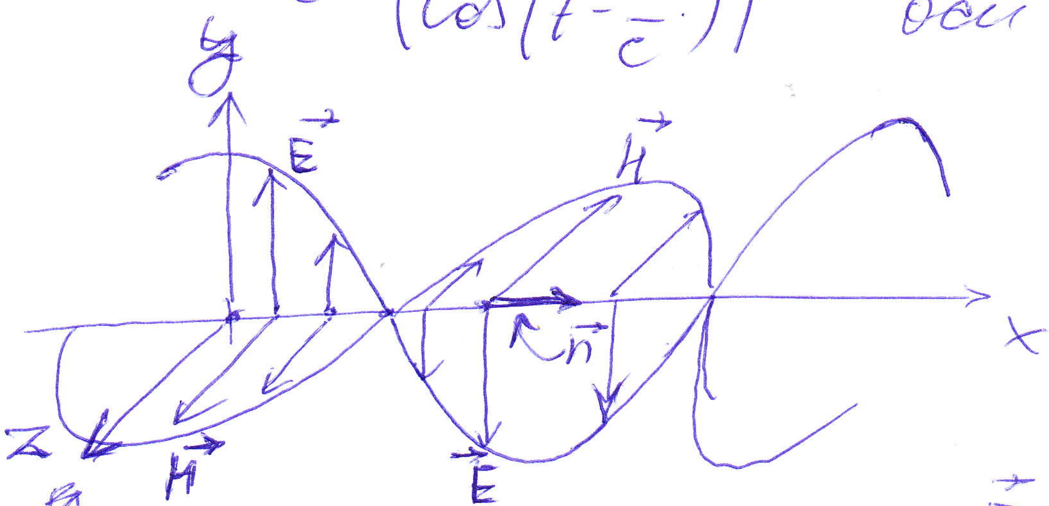
Вот пример практически важного случая гармонической (синусоидальной) плоской волны:

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{f}(u) = \begin{pmatrix} 0 \\ \sin(u) \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{E} = -\frac{1}{c} \begin{pmatrix} 0 \\ \cos\left(t - \frac{x}{c}\right) \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{H} = -\frac{1}{c} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \cos\left(t - \frac{x}{c}\right) \end{pmatrix}$$

— волна распространяется вдоль оси Ox:



Так выглядит картина $\vec{E}$ и $\vec{H}$ в момент $t = \pi$, например.