Материалы к семинарам по матанализу

12-я неделя (04.12–08.12.2017)

Краткое содержание лекций

Лекция 14. Тейлоровское исчисление и оценки остаточных членов (06.12.2017)

1. Теорема единственности для многочлена Тейлора
2. Тейлоровское исчисление: многочлен Тейлора суммы, произведения и частного
3. Тейлоровское исчисление: многочлен Тейлора сложной и обратной функции
4. Формула Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа

Примерные задачи семинаров 25 и 26

Многочлен Тейлора призведения и частного

Задача 12.1. Найдите многочлены Тейлора степени 3 в нуле для функций:

а) $x \sin x$

б) $\sqrt{1-x}\sin x$

в) $\frac{x}{\sin x}$

г) $\frac{\sin x}{\sqrt{1-x}-1}$

Многочлен Тейлора сложной и обратной функции

Задача 12.2. Выразите многочлен Тейлора степени 3 в нуле для функции g через многочлен Тейлора степени 3 в нуле для функции f, при условии, что $f(0) = 0$, если:

а)$g(x) = f(\sin x)$

б) $g(x) = f(\operatorname{tg} x)$

в) $g(x) = f((1+x)^a)$

г) $g(x) = \sin(f(x))$

д) $g(x) = \operatorname{tg}(f(x))$

е) $g(x) = (1 + f(x))^a$

Задача 12.3. Выразите многочлен Тейлора степени 3 в нуле для функции $\sqrt[5]{f(x)}$ через многочлен Тейлора степени 3 в нуле для функции f, при условии, что $f(0) = 1$.

Задача 12.4. Найдите главный член в нуле следующих функций: $(x + x^2)^n$; $(\sin x)^n$.

Задача 12.5. Пусть функция f трижды дифференцируема в окрестности нуля и нуль является ее неподвижной точкой.

а) Пусть $f'(0) = 1$. Как связаны между собой главные нелинейные части в нуле отображений f и f^{-1}?

б) Предположим, что $f'(0) \neq 0$. Выразите многочлен Тейлора степени 3 функции f^{-1} через многочлен Тейлора степени 3 функции f. Зачем вводилось условие $f'(0) \neq 0$?

Задача 12.6. Пусть $D(x)$ — функция Дирихле. Можно ли приблизить функцию $\cos(D(x))$ многочленом

$$P_n(x) = 1 - \frac{D(x)^2}{2!} + \frac{D(x)^4}{4!} - \ldots + (-1)^n \frac{D(x)^{2n}}{(2n)!}?$$

Если да, то с какой точностью?

Приближенные вычисления

Задача 12.7. Для каких x с точностью до 0,00001 справедлива формула

а) $\operatorname{tg} x = x + x^3/3$, б) $\operatorname{arctg} x = x - x^3/3$?

Задача 12.8. Вычислите приближённо а) $\sqrt[3]{30}$, б) $\arcsin 0{,}45$ и оцените погрешность.

Задачи посложнее

Задача 12.9*. Пусть $f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \ldots + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(x+\theta h)$, где $0 < \theta < 1$ и, кроме того, $f^{(n+1)}(x) \neq 0$. Доказать, что $\lim\limits_{h \to 0} \theta = \frac{1}{n+1}$.

Задача 12.10*. а) Пусть f — дважды непрерывно дифференцируемая функция, определенная на отрезке $[0,1]$, и удовлетворяющая соотношению $f(0) = f(1) = 0$. Пусть существует постоянная C, такая что $|f''(x)| \leq C$ для любого $x \in (0,1)$. Доказать, что $|f'(x)| \leq C/2$ для всех $x \in (0,1)$.
б)Пусть f — дважды непрерывно дифференцируемая функция, определенная на всей прямой, и $M_k = \sup\limits_{-\infty<x<\infty} |f^{(k)}(x)| < \infty$, где $k = 0, 1, 2$. Доказать неравенство $M_1^2 \leq 2M_0 M_2$.
Указание. Примените формулу Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа.

Вычисление разложений Тейлора. Вычисление пределов

Задача 12.11. Вычислите многочлен Тейлора пятой степени для функции $f(x) = \operatorname{tg} x$ в нуле:
а) вычисляя $f'(x), \ldots, f^{(5)}(x)$
(указание: удобно пользоваться формулой $(\operatorname{tg} x)' = \operatorname{tg}^2 x + 1$, тогда все эти выражения будут многочленами от $\operatorname{tg} x$),
б) из равенства $f(x) = \sin x / \cos x$, пользуясь разложениями для синуса и косинуса,
в) по методу неопределённых коэффициентов, используя равенство $f(x) \cdot \cos x = \sin x$,
г) по методу неопределённых коэффициентов, используя равенство $f(\operatorname{arctg} x) = x$,
д) по методу неопределённых коэффициентов, используя равенство $\operatorname{arctg}(f(x)) = x$.

Задача 12.12. Написать разложения для следующих функций в виде $f(x) = P(x) + o(x^a)$:
а) $f(x) = \sin(\sin x))$, до $o(x^3)$;
б) $f(x) = x \operatorname{ctg}(x)$, до $o(x^3)$;
в) $f(x) = \sqrt[3]{\sin(x^3)}$, до $o(x^{13})$.

Задача 12.13. Найти функцию вида Cx^n, эквивалентную $f(x) = \sin(\operatorname{tg} x) - \operatorname{tg}(\sin x)$ при $x \to 0$.

Задача 12.14. Найти пределы:
а) $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{\sin x} \right)$; б) $\lim\limits_{x \to +\infty} x(\pi - 2 \operatorname{arctg} x)$.