

## Семинар 12

### Аналитическая геометрия 1

Первые 7 задач – это вариант двухчасового экзамена по аналитической геометрии на факультете радиоэлектроники МЭИ в 1956 году. В качестве силомера.

Действие происходит в евклидовом пространстве с фиксированным ортонормированным базисом, задающим ориентацию.  $[,]$  обозначает векторное произведение в трехмерном евклидовом пространстве.

0. Написать уравнение биссектрисы острого угла между прямыми  $x - 3y = 0$ ,  $3x - y + 5 = 0$ .
1. Вычислить площадь треугольника, вершины которого находятся в точках  $A = (-1, 0, -1)$ ,  $B = (0, 2, 3)$ ,  $C = (4, 4, 1)$ .
2. Вычислить объем коробочки, зная длины  $a, b, c$  трех ее ребер, выходящих из одной вершины, и углы  $\alpha, \beta, \gamma$  между ними.
3. Найти вектор  $x$ , если  $[v[v \dots [v, x]] \dots] = 0$  (всего 2000 квадратных скобок). Вектор  $v \neq 0$ .
4. Даны три независимых вектора  $a, b, c$ . Известно, что  $[a, b] = [b, c] = [c, a]$ . Доказать, что  $a + b + c = 0$ . Верно ли обратное утверждение?
5. Доказать, что вектор  $[a, b] + [b, c] + [c, a]$  является нормальным вектором плоскости, проходящей через концы независимых векторов  $a, b, c$ ?
6. Даны три независимых вектора  $a, b, c$ . Найти площадь параллелограмма, который является ортогональной проекцией на плоскость  $c^\perp$  параллелограмма, построенного на векторах  $a, b$ .

#### Дополнительные задачи

7. Рассмотрим треугольную пирамиду. Для каждой из ее граней нарисуем вектор, ортогональный этой грани, направленный в сторону противолежащей вершины и равный по длине площади грани. Доказать, что сумма этих векторов равна 0.
8. Найти центр и радиус шара, вписанного в треугольную пирамиду с вершинами в точках  $(1, 2, 3), (-2, 8, 9), (5, 0, 7), (3, 4, 2)$ . Тот же вопрос про описанный шар.