1 Принцип наименьшего действия

2 Законы сохранения

3 Интегралы движения и задача Кеплера

4 Дифференциальные формы

5 Уравнения Гамильтона

6 Скобки Пуассона

7 Примеры пуассоновых многообразий

8 Канонические преобразования

9 Канонические преобразования и уравнение Гамильтона-Якоби

10 Уравнение Гамильтона-Якоби и интегрируемость

11 Интегрируемость: теорема Лиувилля

12 Динамика твердого тела и пара Лакса

Пока мы познакомились с проблемой интегрируемости “в абстрактном ключе” – например на уровне теоремы Лиувилля, которая вовсе не дает конструктивного способа построения интегрируемой замены переменных, т.е. канонического преобразования $dp \wedge dq \mapsto dI \wedge d\varphi$. Мы выяснили также, что такой способ (с точностью до некоторой нормировки!) существует, если удается решить методом разделения переменных уравнение Гамильтона-Якоби. Однако, большинство интегрируемых систем, известных на данный момент, решается по-другому – тогда, и только тогда, когда для них удается найти так называемое *представление Лакса* [1].

Наиболее естественным образом это представление возникает в задаче о движении твердого тела, где довольно естественно ожидать интегрируемости – т.к. движение свободно. Однако в случае более трех степеней свободы (естественного многомерного обобщения задачи твердого тела в $\mathbb{R}^3$) интегрируемость доказать не так просто, зато существует формулировка, естественным образом приводящая к понятию об операторе Лакса и основных необходимых свойствах этого оператора.

12.1 Движение твердого тела

Определение: Твердым телом называется набор материальных точек, расстояние между которыми неизменно $|\vec{x}_I - \vec{x}_J| = \text{const}$ [2]. Движение твердого тела одобно описывать как движение его центра инерции, т.е. точке в которой выполняется $\sum_I m_I \vec{x}_I = 0$, $\vec{x}_I \in \mathbb{R}^3$ с началом в этой точке, и вращение относительно этого центра – таким образом конфигурационное пространство системы представляет собой $M = \mathbb{R}^3 \times SO(3)$. Для простоты мы забудем про движение центра инерции, и будем изучать вращения твердого тела, описываемые элементами $U \in SO(3)$, например тремя углами $U = U(\vec{\varphi})$, поворотов вокруг осей декартовой системы координат [3]. Это часто называют движением твердого тела, закрепленного в точке.

При вращении на угол $\delta\vec{\varphi}$ координата точки $\vec{x}$ меняется как

$$\delta\vec{x} = \delta\vec{\varphi} \times \vec{x} \tag{1}$$

под действием бесконечно-малого элемента группы вращений. Переходя

[1] Другие известные названия – пара Лакса, представление нулевой кривизны итп.

[2] Это довольно существенное физическое приближение, скажем в релятивистской физике оно просто невозможно.

[3] Сразу зафиксируем вопрос: являются ли эти углы хорошими обобщенными координатами?

к производным по времени, получим

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{x} \tag{2}$$

где $\vec{\omega} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt}$ называется угловой скоростью. Легко убедиться (задача – проверить самостоятельно!), что угловая скорость одинакова для всех точек твердого тела, и не зависит от выбора закрепленной точки.

Как лагранжиан, так и гамильтониан системы при отсутствии внешнего воздействия определяется кинетической энергией. Для каждой точки легко написать

$$\frac{m}{2}\left(\frac{d\vec{x}}{dt}\right)^2 = \frac{m}{2}\left(\vec{\omega} \times \vec{x}, \vec{\omega} \times \vec{x}\right) = \frac{m}{2}\left(\vec{\omega}^2\vec{x} - (\vec{\omega}\cdot\vec{x})^2\right) \tag{3}$$

Действительно, это очевидно, например в компонентах, поскольку

$$\begin{gathered}(\vec{\omega} \times \vec{x})_i = \sum_{j,k} \epsilon_{ijk}\omega_j x_k \\ \sum_i \epsilon_{ijk}\epsilon_{iln} = \delta_{jl}\delta_{kn} - \delta_{jn}\delta_{kl}\end{gathered} \tag{4}$$

Таким образом, лагранжиан твердого тела принимает вид

$$\mathfrak{L} = \tfrac{1}{2}\sum_{i,k} J_{ik}\omega_i\omega_k = \tfrac{1}{2}(\omega, J\omega) \tag{5}$$

где квадратичная форма задается симметричной матрицей

$$J_{ik} = \int dm(x)\left(x^2\delta_{ik} - x_i x_k\right) = \int d^3x\rho(x)\left(x^2\delta_{ik} - x_i x_k\right) \tag{6}$$

вклад в которую дают все точки твердого тела с весом $dm(x)\left(x^2\delta_{ik} - x_i x_k\right)$, называемой *тензором инерции*. Поскольку любую симметричную матрицу можно привести ортогональным преобразованием к диагональному виду, то в дальнейшем можем без потери общности считать, что $J_{ik} = J_i\delta_{ik}$.

Очевиден и переход к гамильтониану, производная по скорости дает

$$\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial\omega_i} = \sum_k J_{ik}\omega_k = M_i \tag{7}$$

компоненты импульса – вектора момента количества движения $\vec{M} = J\vec{\omega}$. В том, что это момент импульса, легко убедиться, посчитав по определению (для каждой точки)

$$\vec{M} = \vec{x} \times \vec{p} = m\vec{x} \times (\vec{\omega} \times \vec{x}) = J\vec{\omega} \tag{8}$$

где опять можно проверить в компонентах

$$\begin{aligned} M_i = m \sum_{j,k} \epsilon_{ijk} x_j \sum_{l,n} \epsilon_{kln} \omega_l x_n = m \sum_{j,l,n} (\delta_{il}\delta_{jn} - \delta_{in}\delta_{jl}) x_j x_n \omega_l = \\ = m \sum_j (\omega_i x^2 - x_i x_j \omega_j) = m \sum_j (\delta_{ij} x^2 - x_i x_j) \omega_j = \sum_j J_{ij} \omega_j \end{aligned} \tag{9}$$

После преобразования для гамильтониана очевидно получаем

$$H = \tfrac{1}{2}(M, J^{-1}M) = \tfrac{1}{2} \sum_{i,k} J^{-1}_{ik} M_i M_k \tag{10}$$

где симметричный тензор инерции считаем невырожденным, положительно определенным (и даже – диагональным).

12.2 Уравнения движения

Мы начнем с гамильтонова формализма, поскольку варьировать непосредственно лагранжиан (5) не очень осмысленно, углы $\delta\vec{\varphi}$ являются "плохими координатами" так как группа вращений $SO(3)$ некоммутативна (кроме их численных значений нужно еще задавать и порядок, в котором осуществляются повороты вокруг данных осей).

Используем гамильтониан (10) вместе с канонической скобкой Пуассона на компоненты момента количества движения

$$\{M_i, M_j\} = \epsilon_{ijk} M_k \tag{11}$$

Тогда

$$\dot{M}_i = \{M_i, H\} = \epsilon_{ijk} M_k \frac{\partial H}{\partial M_j} = \epsilon_{ijk} M_k J^{-1}_{jl} M_l = \epsilon_{ijk} \omega_j M_k \tag{12}$$

или же просто

$$\dot{\vec{M}} = \vec{\omega} \times \vec{M} \tag{13}$$

Для дальнейшего удобно переписать эти уравнения в матричной форме, воспользовавшись структурой алгебры Ли $\mathfrak{g} = so(3)$ на $\mathbb{R}^3$, т.е. введя матрицы

$$\begin{aligned} L_{ij} &= \epsilon_{ijk} M_k, & \Omega_{ij} &= \epsilon_{ijk}\omega_k \\ M_i &= \tfrac{1}{2}\epsilon_{ijk} L_{jk}, & \omega_i &= \tfrac{1}{2}\epsilon_{ijk}\Omega_{jk} \end{aligned} \tag{14}$$

откуда следует

$$\begin{aligned} L_{ij} = \epsilon_{ijk} M_k = \epsilon_{ijk} J_{kl}\omega_l = \tfrac{1}{2}\epsilon_{ijk} J_{kl}\epsilon_{lpq}\Omega_{pq} = \\ = \tfrac{1}{2} J_{kl}\Omega_{pq} \begin{vmatrix} \delta_{il} & \delta_{ip} & \delta_{iq} \\ \delta_{jl} & \delta_{jp} & \delta_{jq} \\ \delta_{kl} & \delta_{kp} & \delta_{kq} \end{vmatrix} = \mathrm{Tr} J\Omega_{ij} - J_{ik}\Omega_{kj} - \Omega_{ik} J_{kj} \end{aligned} \tag{15}$$

или, в матричном виде имеем по-прежнему линейную связь

$$L = I\Omega + \Omega I \tag{16}$$

где мы ввели симметричную матрицу

$$I_{ik} = \tfrac{1}{2}\mathrm{Tr} J\delta_{ik} - J_{ik} \tag{17}$$

которую тоже можно считать диагональной.

Уравнения движения (13) легко переписать в матричном виде

$$\begin{aligned} \dot{L}_{ij} = \epsilon_{ijk}\dot{M}_k = \epsilon_{ijk}\epsilon_{kpq}\omega_p M_q = (\delta_{ip}\delta_{jq} - \delta_{iq}\delta_{jp})\omega_p M_q = \\ = (\delta_{ip}\delta_{jq} - \delta_{ij}\delta_{pq} + \delta_{ij}\delta_{pq} - \delta_{iq}\delta_{jp})\omega_p M_q = \\ = (\epsilon_{kiq}\epsilon_{kpj} + \epsilon_{kip}\epsilon_{kjq})\omega_p M_q = \Omega_{jk} L_{ki} + \Omega_{ki} L_{kj} = \\ = L_{ik}\Omega_{kj} - \Omega_{ik} L_{kj} = [L, \Omega]_{ij} \end{aligned} \tag{18}$$

т.е. в форме

$$\dot{L} = [L, \Omega] \tag{19}$$

матричного коммутатора.

Заметим, что уравнение (19) сразу возникает как уравнение ЭЛ из Лагранжиана

$$\mathfrak{L} = \mathrm{Tr}(I\Omega\Omega), \qquad \Omega = U^{-1}\dot{U} \in so(N) \tag{20}$$

который мы записали введя *настоящие координаты* на группе вращений, матрицу $U \in SO(N)$, и обобщив сразу этот вид на вращение в евклидовом пространстве произвольной размерности. Действительно

$$
\begin{gathered}
\delta\Omega = U^{-1}\delta\dot{U} - U^{-1}\delta U\Omega \\
\delta\mathfrak{L} = \mathrm{Tr}(\Omega I\delta\Omega) + \mathrm{Tr}(I\Omega\delta\Omega) \underset{(16)}{=} \mathrm{Tr}(L\delta\Omega) = \\
= \mathrm{Tr}(LU^{-1}\delta\dot{U}) - \mathrm{Tr}(LU^{-1}\delta U\Omega) = \frac{d}{dt}\mathrm{Tr}(LU^{-1}\delta U) - \\
-\mathrm{Tr}(\dot{L}U^{-1}\delta U) + \mathrm{Tr}(LU^{-1}\dot{U}U^{-1}\delta U) - \mathrm{Tr}(LU^{-1}\delta U\Omega) = \\
= \frac{d}{dt}\mathrm{Tr}(LU^{-1}\delta U) + \mathrm{Tr}\left((-L + L\dot{\Omega} - \Omega L)U^{-1}\delta U\right)
\end{gathered} \tag{21}
$$

и, отбрасывая полную производную по времени, из зануления последнего слагаемого получаем уравнение (19).

12.3 Представление Лакса

Чем замечательно уравнение (19). Из него немедленно следует, что у системы имеются интегралы движения, поскольку $\dot{L}^k = -\left[\Omega, L^k\right]$ для любой степени k, а значит (для матриц конечного размера)

$$
\frac{d}{dt}\mathrm{Tr}(L^k) = -\mathrm{Tr}\left[\Omega, L^k\right] = 0, \qquad k = 1, 2, 3, \ldots \tag{22}
$$

т.е. $H_k = \mathrm{Tr}(L^k)$ являются интегралами движения.

Остается более сложный вопрос о числе таких независимых интегралов, и легко видеть, что ответ на него – отрицательный. Уже в трехмерном пространстве, поскольку

$$
\begin{gathered}
\mathrm{Tr}L = 0, \qquad \mathrm{Tr}(L^2) = \sum_{i,j} L_{ij}L_{ji} = -\epsilon_{ijk}\epsilon_{ijl}M_kM_l = -2\sum_k M_k^2 \\
\mathrm{Tr}(L^3) = \epsilon_{ijk}\epsilon_{jln}\epsilon_{lim}M_kM_nM_m = (\delta_{kl}\delta_{in} - \delta_{kn}\delta_{il})\epsilon_{lim}M_kM_nM_m = \\
= \epsilon_{knm}M_kM_nM_m = 0
\end{gathered} \tag{23}
$$

а старшие степени матрицы L заведомо не являются независимыми [4].

[4] Таким образом, реально мы получим из представления (19) $\lfloor N/2 \rfloor$ интегралов движения, т.е. все четные $\mathrm{Tr}(L^{2k})$ при $k = 1, 2, \ldots, \lfloor N/2 \rfloor$.

Поэтому представление Лакса (19) удобно для поиска интегралов движения, но его явно недостаточно.

Теорема Манакова, 1976: Уравнения движения твердого тела в N-мерном пространстве допускают представление Лакса

$$\dot{\mathcal{L}} = [\mathcal{L}, A] \tag{24}$$

где матрицы $(\mathcal{L}, A) = (\mathcal{L}(z), A(z))$ – элементы пары Лакса, зависящей от спектрального параметра (напомним, что симметричную матрицу $I_{ij} = I_i\delta_{ij}$ можно считать диагональной)

$$\mathcal{L} = I^2 z + L, \qquad A = Iz + \Omega \tag{25}$$

Представление (24) приводит к существованию $\frac{1}{2}\left[\frac{N}{2}\right] + \frac{N(N-1)}{4}$ интегралов движения в инволюции, коэффициентов полиномов $\mathrm{Tr}\mathcal{L}(z)^k$, $k = 2, \ldots, N$.

Для доказательства посмотрим сначала, что дает уравнение (24). Вычисляя коммутатор в правой части получим

$$[\mathcal{L}, A] = z^2\left[I^2, I\right] + z\left(\left[I^2, \Omega\right] + [L, I]\right) + [L, \Omega] \tag{26}$$

Коммутатор при z^2 звнуляется автоматически. При первой степени имеем в силу (16)

$$\left[I^2, \Omega\right] + [L, I] = I^2\Omega - \Omega I^2 + \Omega I^2 + I\Omega I - I\Omega I - I^2\Omega = 0 \tag{27}$$

нетривиальное сокращение. Наконец, независящий от спектрального параметра член дает ровно уравнение движения (19), поскольку

$$[L, \Omega] = [\mathcal{L}, A] = \dot{\mathcal{L}} = \frac{d}{dt}(I^2 z + L) = \dot{L} \tag{28}$$

В силу уравнений Лакса (24) (с операторами, зависящими от спектрального параметра) очевидно, что

$$\frac{d}{dt}\mathrm{Tr}\mathcal{L}^k = \mathrm{Tr}\left[\mathcal{L}^k, A\right] = 0 \tag{29}$$

поэтому полиномы

$$P_k(z) = \mathrm{Tr}\mathcal{L}^k = \sum_l H_{kl} z^l \tag{30}$$

являются производящими функциями для интегралов движения $\{H_{kl}\}$, число которых растет квадратично с ростом размера матрицы N (как и число динамических переменных). Хотя

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}\mathcal{L}^2 = \mathrm{Tr}\left(I^2 z + L\right)^2 = z^2\mathrm{Tr}I^4 + 2z\mathrm{Tr}(I^2 L) + \mathrm{Tr}L^2 = \\ = z^2\mathrm{Tr}I^4 - 2\vec{M}^2\end{aligned} \tag{31}$$

не дает ничего нового, но уже

$$\mathrm{Tr}\mathcal{L}^3 = \mathrm{Tr}\left(I^2 z + L\right)^3 = z^3\mathrm{Tr}I^6 + 3z\mathcal{L}_1 \tag{32}$$

где

$$\mathcal{L}_1 = -2\mathrm{Tr}J^2\vec{M}^2 + 4(\det J)H \tag{33}$$

где искомый гамильтониан H определен искомой формулой (10).

12.4 Свойства оператора Лакса для твердого тела

Общий разговор о свойствах операторов Лакса мы пока отложим, но отметим сразу ряд важных свойств формул (25)

- Оператор Лакса удовлетворяет матричному уравнению первого порядка (24), которое автоматически генерирует интегралы движения.

- Уравнения (24) сильно *переопределены*, так как являются системой как минимум из N^2 линейных динамических уравнений на коэффициенты матрицы Лакса. "Содержательных" из них не так много, а остальные должны удовлетворяться в силу ряда тождеств. Эти тождества – нетривиальные свойства прелставления Лакса.

- Реальная интегрируемость (достаточное количество интегралов движения) часто возникает лишь когда оператор Лакса $\mathcal{L} = \mathcal{L}(z)$ дополнительно зависит от *спектрального параметра* z. В этом случае интегралы движения можно "считывать" из характеристического уравнения
$$\det(\mathcal{L}(z) - \lambda) = F(\lambda, z) = 0 \tag{34}$$

которое представляет собой комплексную кривую, точнее семейство кривых параметризованное интегралами движения (коэффициентами уравнения). При этом над каждой точкой $\mathcal{M}_C$ в пространстве модулей таких кривых (т.е. при фиксированных значениях интегралов движения) висит комплексный тор – якобиан кривой (34). Лиувиллев тор при этом является вещественным сечением якобиана, т.е. представление Лакса дает конструктивный способ поиска переменных действие-угол.