Лекция 14. Тейлоровское исчисление и оценки остаточных членов.

1 Теорема единственности

Есть три равносильных оределения многочлена Тейлора.

Первое - это многочлен наилучшего приближения к функции в точке. Формальное определение - это многочлен T степени n такой, что

$$f(0) = T(0), \ldots, f^{(n)}(0) = T^{(n)}(0). \quad (1)$$

Второе - это знаменитая явная формула:

$$T_{f,0,n}(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1}x + ... + \frac{f^{(n)}}{n!}x^n. \quad (2)$$

Третье - новое и, может быть, самое полезное. Многочлен Тейлора $T_{f,n,0}$ - это такой многочлен T степени n, что

$$f(x) - T(x) = o(x^n) \quad (3)$$

при $x \to 0$.

Теорема 1 *Все три определения многочлена Тейлора степени n для функции класса C^n эквиваленитны.*

Доказательство $1 \Rightarrow 2$. Этот вывод доказан на предыдущей лекции.

$2 \Rightarrow 3$. Это доказательство формулы остаточного члена в форме Пеано.

$3 \Rightarrow 1$. Предположим, что T - многочлен степени n, удовлетворяющий (3), и $\tilde{T}$ - многочлен Тейлора в смысле определения 1, а значит, и 2. Тогда

$$f(x) - \tilde{T}(x) = o(x^n).$$

Выведем отсюда, что $T \equiv \tilde{T}$; это докажет теорему. Предположим противное. Если $T \not\equiv \tilde{T}$, то у этих многочленов существуют несовпадающие члены степени не выше n; пусть $a_k x^k \neq \tilde{a}_k x^k$ - младшие из них. Тогда

$$T(x) - \tilde{T}(x) = x^k(a_k - \tilde{a}_k) + o(x^k) \neq o(x^n).$$

Но

$$T(x) - \tilde{T}(x) = (f(x) = o(x^n)) - (f(x) + o(x^n)) = o(x^n) - \text{ противоречие.}$$

$\square$

2 Примеры

а. Пусть $f = g + h$. Тогда

$$T_{f,n,0} = T_{g,n,0} + T_{h,n,0}. \tag{4}$$

Доказывается одинаково просто с помощью формул (2) и (3). Прокоммментируем последнее рассуждение. Имеем:

$$f(x) = g + h = T_{g,n,0} + o(x^n) + T_{h,n,0} + o(x^n) = (T_{g,n,0} + T_{h,n,0}) + o(x^n).$$

По определению 3, получаем (4).

b. Найдем многочлен Тейлора для функции $f(x) = \frac{\sin x}{x}$. Имеем:

$$T(x) = T_{\sin x, 2n+1, 0}(x) = x - \frac{x^3}{6} + \dots (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}. \tag{5}$$

Далее,

$$\sin x = T(x) + o(x^{2n+1}).$$

Отсюда

$$\frac{\sin x}{x} = \frac{T(x)}{x} + o(x^{2n}). \tag{6}$$

Следовательно,

$$T_{f,2n,0} = 1 - \frac{x^2}{6} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n+1)!}.$$

Попробуйте получить эту формулу с помощью прямого подсчета производных!

Одну техническую деталь мы пропустили: не доказали, что остаточный член в формуле (6) - класса C^{2n}. Это легко выводится из того, что остаточный член в формуле (5) обращается в ноль в нуле вместе со всеми своими производными до порядка $2n+1$ включительно.

3 Тейлоровское исчисление: многочлен Тейлора суммы, произведения и частного

Обозначим через $[T_k]_n$ усечение многочлена степени $k > n$ до членов степени n. Эта операция состоит в отбрасывании членов степени выше n:

$$[a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n + \dots + a_k x^k]_n = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n.$$

Очевидно,

$$T_k = [T_k]_n + o(x^n). \tag{7}$$

Докажите!

Теорема 2 *Пусть* $T_{f,n,0} = T_f,\ T_{g,n,0} = T_g$. *Тогда*

$$T_{fg,n,0} = [T_f T_g]_n. \tag{8}$$

Доказательство По формуле (3),

$$f = T_f + o(x^n),\ g + T_g + 0(x^n).$$

Тогда

$$fg = (T_f + o(x^n))(T_g + o(x^n)) = T_f T_g + R(x),\ R(x) = o(x^n)T_g + o(x^n)T_f + o(x^n)o(x^n).$$

Докажем, что $R(x) = o(x^n)$. Имеем:

$$\lim_{x\to 0} \frac{R(x)}{x^n} = \lim_{x\to 0} \frac{o(x^n)}{x^n} T_g + \frac{o(x^n)}{x^n} T_f + \frac{o(x^n)}{x^n} \cdot o(x^n) = 0$$

по теореме о пределе суммы и произведения. Но это еще не значит, что $T_f \cdot T_g = T_{fg,n,o}$! Действительно, $T_f \cdot T_g$ - многочлен степени $2n$ (вообще говоря), а нам нужен многочлен степени n. На самом деле, верна формула (8), поскольку

$$T_f \cdot T_g - [T_f \cdot T_g]_n = o(x^n).$$

$\square$

Следующая теорема более трудная. Нет формулы для тейлоровского многочлена частного, аналогичной (8). Мы пишем формулу *не для функции* $\frac{f}{g}$, а для функции $\frac{f}{1-g}$ при условии, что $g(0) = 0$. Это условие обеспечивает нам равенство

$$g^{n+1}(x) = o(x^n). \tag{9}$$

Докажите его! Чтобы написать формулу Тейлора для $\frac{f}{1-g}$, достаточно написать эту формулу для $\frac{1}{1-g}$, а затем воспользоваться предыдущей теоремой. Нам поможет формула для суммы членов геометрической прогрессии:

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + \cdots + x^n + \frac{x^{n+1}}{1-x}.$$

Отсюда

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + \cdots + x^n + o(x^n).$$

Теорема 3 *Пусть* $g(0) = 0,\ T_{g,n,0} = T_g$. *Тогда*

$$T_{\frac{1}{1-g},n,0} = [1 + T_g + T_g^2 + \cdots + T_g^n]_n. \tag{10}$$

Доказательство

$$\frac{1}{1-g} = 1+g+g^2+\cdots+g^n+\frac{g^{n+1}}{1-g} = 1+(T_g+o(x^n))+(T_g+o(x^n))^2+\ldots(T_g+o(x^n))^n+o(x^n)$$

по формулам (3) и (9).

Следовательно,

$$\frac{1}{1-g} = 1+T_g+T_g^2+\cdots+T_g^n+o(x^n).$$

По формуле (7), отсюда следует (10). □

Это рассуждение подводит нас к общей идее о многочлене Тейлора сложной функции. В этой теореме, как и раньше, существенно требование $g(0)=0$ и вытекающее из него соотношение (9).

4 Многочлен Тейлора сложной функции.

Теорема 4 *Пусть $f, g \in C^\infty$, и $g(0)=0$; $T_f = T_{f,n,0}$, $T_g = T_{g,n,0}$. Тогда для любого n,*

$$T_{f\circ g,n,0} = [T_f \circ T_g]_n. \tag{11}$$

Доказательство Докажем сначала, что

$$f\circ g - T_f \circ T_g = o(x^n). \tag{12}$$

Отсюда и из (9) следует (11). Пусть R_f и R_g - остаточные члены:

$$f = T_f + R_f,\ g = T_g + R_g,\ R_f = o(x^n),\ R_g = o(x^n).$$

Тогда

$$f\circ g = f\circ(T_g+R_g) = f\circ T_g + P,\ P = f\circ g - f\circ T_g.$$

Докажем, что $P = o(x^n)$. Мы знаем (по теореме Лагранжа), что непрерывно дифференцируемая функция Липшицева. Следовательно, существуют такие L и ε, что при $|x|<\varepsilon,\ |y|<\varepsilon$

$$|f(x)-f(y)| \leq L|x-y|.$$

Функции g и T_g непрерывны в нуле, и $g(0)=T_g(0)=0$. Значит, существует такое δ, что при $|x|<\delta,\ |g(x)|<\varepsilon,\ |T_g(x)|<\varepsilon$. Тогда, при $|x|<\delta$,

$$|f\circ g(x) - f\circ T_g(x)| \leq LR_g(x) = o(x^n).$$

В дальнейшем мы такие рассуждения будем проводить менее подробно. Далее,

$$f\circ(T_g) - T_f\circ T_g = R_f \circ T_g.$$

Имеем:
$$\frac{R_f \circ T_g}{x^n} = \frac{R_f \circ T_g}{T_g^n} \cdot \frac{T_g^n}{x^n} \to 0 \text{ при } x \to 0.$$
Действительно, T_g не обращается в 0 в проколотой окрестности нудя, поэтому первый сомножитель стремится к нулю. Второй стремится к конечному пределу $(T_g'(0))^n$. $\square$

5 Многочлен Тейлора обратной функции.

Пусть $T_{f,2,0} = a_1x + a_2x^2$, $a_1 \neq 0$. По локальной теореме об обратной функции, существует и дифференцируема в окрестности нуля функция f^{-1}.

Существование первой производной у функции f^{-1} доказано. Докажите по индукции существование старших.

Будем искать $T_{g,2,0},\ g = f^{-1}$, методом неопределенных коэффициентов. Пусть
$$T_{g,2,0} = b_1x + b_2x^2.$$
По предыдущей теоерме,
$$[T_{g,2,0} \circ T_{f,2,0}]_2 = x.$$
Подробнее,
$$[b_1(a_1x + a_2x^2) + b_2(a_1x + a_2x^2)^2]_2 = b_1a_1x + (b_1a_2 + b_2a_1^2)x^2.$$
Отсюда:
$$b_1 = a_1^{-1},\ b_2 = -\frac{b_1a_2}{a_1^2},\ T_{g,2,0} = \frac{x}{a_1} - \frac{b_1a_2}{a_1^2}x^2.$$

Задача 1 *1. Пусть*
$$f(x) = x + a_1x^2 + a_3x^2 + o(x^3) \text{ при } x \to 0.$$
Найдите $T_{f^{-1},3,0}$.

2. Пусть
$$f(x) = x + a_{100}x^{100} + \cdots + a_{200}x^{200} + o(x^{200}).$$
Найдите $T_{f^{-1},n,0}$ *при*

a) $n = 99$

b) $n = 100$

c) $n = 198$

d) $n = 199$

6 Формула Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа

Как мы видели, формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано весьма эффективна. Но она не позволяет оценить остаточный член сверху. Следующая теорема такую оценку дает, и тем самым позволяет использовать формулу Теційлора для приближенных вычислений.

Теорема 5 *Пусть $f \in C^{n+1}$, $R_n = f - T_{f,n,0}$ - остаточный член. Тогда для любого x существует ξ такое что*

$$R_n(x) = \frac{x^{(n+1)}}{(n+1)!} f^{n+1}(\xi). \tag{13}$$

Эта теорема следует из леммы.

Лемма 1 *Пусть две функции $f, g \in C^{n+1}$ обращаются в 0 в нуле вместе со всеми производными и пусть $f^{(n+1)} \leq g^{(n+1)}$ на некотором отрезке $\sigma = [0, x_0],\ x_0 > 0$. Тогда $f \leq g$ при $x \in \sigma$.*

Лемма очевидна. Вместо доказательства приведем для начала следующее рассуждение. Пусть два одинаковых автомобиля стоят на одной черте и одновременно стартуют. Тот гонщик, который газует сильнее (имеет большее ускорение), вырвется вперед. Аккуратное доказательство проводится индукцией по n с помощью теоремы Лагранжа. **Доказательство** теоремы 5. Что мы знаем об остаточном члене? Вот что:

$$R_n^{(n+1)} = f^{(n+1)},\ R_n(0) = R_n'(0) = \ldots = R_n^{(n)}(0). \tag{14}$$

Пользуясь этими данными мы сейчас его оценим, а позже найдем в виде одной компактной формулы. Пусть $x > 0, \sigma = [0, x]$,

$$\min_\sigma f^{(n+1)} = m, \max_\sigma f^{(n+1)} = M.$$

Заметим, что $(x^{n+1})^{(n+1)} = (n+1)!$. По лемме,

$$m\frac{x^{(n+1)}}{(n+1)!} \leq R_n(x) \leq M\frac{x^{(n+1)}}{(n+1)!}.$$

Отсюда следует, что частное

$$\frac{R_n(x)}{\frac{x^{(n+1)}}{(n+1)!}}$$

заключено между минимальным и максимальным значением функции $f^{(n+1)}$ на отрезке σ. По теореме о промежуточном значении, это частное равно $f^{(n+1)}(\xi)$ для некоторой точки $\xi \in \sigma$. Это доказывает теорему при $x > 0$. Доказательство для $x < 0$ сводится к предыдущему заменой x на $-x$. $\square$

Доказательство Доказательство леммы проводится индукцией по n. База индукции ($n = 1$) следует из теоремы Лагранжа. Шаг индукции. Предположим, что лемма доказана для n. Докажем ее для $n+1$. По предположению индукции, $f' \leq g'$ на σ. Лемма следует теперь из теоремы Лагранжа. $\square$