

Классическая теория поля 2017.

Листок 4. Электромагнитное поле I: Кинематика. Заряд во внешнем поле.

1. **Лоренцевы инварианты электромагнитного поля.** Рассмотрим тензор напряженности электромагнитного поля $F^{\mu\nu}$ и дуальный тензор

$$\tilde{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \varepsilon^{\mu\nu\rho\lambda} F_{\rho\lambda}.$$

Здесь $\varepsilon^{\mu\nu\rho\lambda}$ — полностью антисимметрический тензор четвертого ранга, $\varepsilon^{0123} = 1$.

а) Выразите в терминах компонент векторов напряженности электрического и магнитного полей \vec{E} и \vec{H} лоренцевы инварианты $F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$ и $\tilde{F}_{\mu\nu}\tilde{F}^{\mu\nu}$.

б) Выразите пфаффиан кососимметрической 4×4 матрицы $F^{\mu\nu}$:

$$\text{Pf}F = \frac{1}{8} \varepsilon_{\mu\nu\rho\lambda} F^{\mu\nu} F^{\rho\lambda} = \frac{1}{4} F^{\mu\nu} \tilde{F}_{\mu\nu}, \quad (\det F = (\text{Pf}F)^2)$$

в терминах компонент векторов \vec{E} и \vec{H} .

в) Для матрицы $F^\mu{}_\nu = F^{\mu\rho}g_{\rho\nu}$

1) докажите соотношения $\text{Tr}F^{2n+1} = 0 \quad \forall n \geq 0$;

2) убедитесь, что лоренцевы скаляры $\text{Tr}F^{2n}$, $n \geq 2$, алгебраически зависимы от $\text{Tr}F^2 = -F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}$ и $\text{Pf}F = \frac{1}{4} F^{\mu\nu} \tilde{F}_{\mu\nu}$.

Указание: воспользуйтесь соотношениями Ньютона, связывающими элементарные симметрические функции со степенными суммами.

2. Найдите закон преобразования компонент E^i и H^i *однородного* в пространстве и *постоянного* во времени электромагнитного поля при переходе в систему координат, движущуюся с постоянной скоростью v вдоль оси Ox .

3. В некоторой системе отсчета существуют однородные и постоянные электрическое и магнитное поля, вектора которых \vec{E} и \vec{H} не параллельны друг другу. Докажите, что *почти всегда* существует инерциальная система отсчета, в которой эти поля будут параллельны и найдите скорость этой системы отсчета относительно исходной системы. Единственно ли решение задачи? В каком случае задача не имеет решения?

Указание. Рассмотрите лоренцевский буст вдоль прямой перпендикулярной к плоскости, натянутой на вектора \vec{E} и \vec{H} . Для поиска исключительного случая полезно воспользоваться лоренцевскими инвариантами, найденными в задаче 1.

4. В плоскости xOy может без трения двигаться материальная точка массы m и заряда $e > 0$. На материальную точку действует потенциальная сила с потенциальной энергией $U(x, y) = m\omega_0^2(x^2 + y^2)/2$ (двумерный гармонический осциллятор). Найдите решение уравнений движения осциллятора в случае, когда он помещен в постоянное и однородное магнитное поле, направленное вдоль оси Oz : $\vec{H} = (0, 0, H)$. Решите задачу в предположении, что скорость материальной точки мала по сравнению со скоростью света c .

5. Релятивистская частица массы m и заряда e с начальным 3-импульсом $\vec{p}_0 = (p_0, 0, 0)$ помещается

а) в постоянное однородное электрическое поле $\vec{E} = (0, 0, E)$;

б) в постоянное однородное магнитное поле $\vec{H} = (0, 0, H)$;

в) в постоянные однородные параллельные электрическое и магнитное поля $\vec{E} = (0, 0, E)$,
 $\vec{H} = (0, 0, H)$.

Определите закон движения и траекторию частицы.