1 Принцип наименьшего действия

2 Законы сохранения

3 Интегралы движения и задача Кеплера

4 Дифференциальные формы

5 Уравнения Гамильтона

6 Скобки Пуассона

7 Примеры пуассоновых многообразий

8 Канонические преобразования

9 Канонические преобразования и уравнение Гамильтона-Якоби

10 Уравнение Гамильтона-Якоби и интегрируемость

11 Интегрируемость: теорема Лиувилля

12 Динамика твердого тела и пара Лакса

13 Операторы Лакса и примеры интегрируемых систем

13.1 Пара Лакса для твердого тела

Уравнения движения твердого тела в N-мерном пространстве допускают предложенное Манаковым представление Лакса

$$\dot{\mathcal{L}} = [\mathcal{L}, A] \tag{1}$$

где матрицы $(\mathcal{L}, A) = (\mathcal{L}(z), A(z))$ – элементы пары Лакса, зависящей от спектрального параметра (симметричную матрицу $I_{ij} = I_i \delta_{ij}$ можно считать диагональной)

$$\mathcal{L} = I^2 z + L, \qquad A = Iz + \Omega \tag{2}$$

Представление (1) приводит к существованию $\frac{1}{2}\left[\frac{N}{2}\right] + \frac{N(N-1)}{4}$ интегралов движения в инволюции, коэффициентов полиномов $\mathrm{Tr}\mathcal{L}(z)^k$, $k = 2, \ldots, N$. Для этого представления существенно, что

- Оператор Лакса удовлетворяет матричному уравнению первого порядка (1), которое автоматически генерирует интегралы движения.
- Уравнения (1) сильно *переопределены*, так как являются системой как минимум из N^2 линейных динамических уравнений на коэффициенты матрицы Лакса. "Содержательных" из них не так много, а остальные должны удовлетворяться в силу ряда тождеств. Эти тождества – нетривиальные свойства прелставления Лакса.
- Реальная интегрируемость (достаточное количество интегралов движения) часто возникает лишь когда оператор Лакса $\mathcal{L} = \mathcal{L}(z)$ дополнительно зависит от *спектрального параметра* z. В этом случае интегралы движения можно "считывать" из характеристического уравнения
$$\det(\mathcal{L}(z) - \lambda) = F(\lambda, z) = 0 \tag{3}$$
которое представляет собой комплексную кривую, точнее семейство кривых параметризованное интегралами движения (коэффициентами уравнения). При этом над каждой точкой $\mathcal{M}_C$ в пространстве модулей таких кривых (т.е. при фиксированных значениях интегралов движения) висит комплексный тор – якобиан кривой

(3). Лиувиллев тор при этом является вещественным сечением якобиана, т.е. представление Лакса дает конструктивный способ поиска переменных действие-угол.

13.2 Свойства представления Лакса

Посмотрим теперь на свойства общего уравнения Лакса (1) в предположении, что матрица Лакса диагонализуема, т.е. существуют решения линейной задачи

$$\mathcal{L}\Psi_k = \lambda_k \Psi_k, \qquad k = 1, \ldots, N \tag{4}$$

Введем также двойственные решения

$$\tilde{\Psi}_k \mathcal{L} = \lambda_k \tilde{\Psi}_k, \qquad (\tilde{\Psi}_k, \Psi_l) = \delta_{kl} \tag{5}$$

Тогда легко проверить, что верна следующая

Теорема: При эволюции в силу уравнения Лакса (1) спектр оператора $\mathcal{L}$ не меняется.

Действительно:

$$\begin{aligned} \dot{\lambda}_k = \frac{\partial}{\partial t}(\tilde{\Psi}_k, \mathcal{L}\Psi_k) = (\dot{\tilde{\Psi}}_k, \mathcal{L}\Psi_k) + (\tilde{\Psi}_k, \mathcal{L}\dot{\Psi}_k) + (\tilde{\Psi}_k, \dot{\mathcal{L}}\Psi_k) = \\ = \lambda_k \Big((\dot{\tilde{\Psi}}_k, \Psi_k) + (\tilde{\Psi}_k, \dot{\Psi}_k) \Big) + (\tilde{\Psi}_k, [\mathcal{L}, A]\, \Psi_k) = \\ = (\tilde{\Psi}_k, (\mathcal{L}A - A\mathcal{L})\Psi_k) = (\lambda_k - \lambda_k)(\tilde{\Psi}_k, A\Psi_k) = 0 \end{aligned} \tag{6}$$

В силу этой теоремы собственные числа оператора Лакса являются интегралами движения, как и их симметрические функции

$$\mathrm{Tr}\mathcal{L}^n = \sum_k \lambda_k^n = p_n(\lambda) \tag{7}$$

или коэффициенты характеристического многочлена

$$\begin{gathered} \det(\lambda - \mathcal{L}) = \lambda^N - \lambda^{N-1}u_1 + \ldots + (-)^N u_N \\ u_n = e_n(\lambda) = \sum_{j_1 < j_2 < \ldots < j_n} \lambda_{j_1} \ldots \lambda_{j_n} \end{gathered} \tag{8}$$

Задача: выразить коэффициенты (7) через (8), и наоборот.

Мгновенно доказывается и следующая

Теорема: Уравнение Лакса (1) является условием совместности линейной задачи

$$\mathcal{L}\Psi = \lambda\Psi$$
$$\dot{\Psi} = \frac{\partial\Psi}{\partial t} = -A\Psi \tag{9}$$

Действительно,

$$\frac{\partial}{\partial t}(\mathcal{L}\Psi) = \dot{\mathcal{L}}\Psi + \mathcal{L}\dot{\Psi} = \dot{\mathcal{L}}\Psi - \mathcal{L}A\Psi \tag{10}$$

а также

$$\frac{\partial}{\partial t}(\lambda\Psi) = \dot{\lambda}\Psi + \lambda\dot{\Psi} = \dot{\lambda}\Psi - \lambda A\Psi = -A\mathcal{L}\Psi \tag{11}$$

в силу изоспектральности. Вычитая одно из другого, получаем

$$\left(\dot{\mathcal{L}} - \mathcal{L}A + A\mathcal{L}\right)\Psi = 0 \tag{12}$$

на всех собственных векторах матрицы Лакса, что возможно только при выполнении уравнения (1).

13.3 Примеры операторов Лакса

Приведем теперь несколько важнейших примеров интегрируемых систем, где операторы Лакса возникают не столь очевидным образом как для N-мерного твердого тела.

13.4 Система частиц Калоджеро-Мозера

Ясно, что для системы свободных частиц матрицу Лакса можно сразу написать в виде

$$\mathcal{L}_{ij} = p_i\delta_{ij}, \quad i,j = 1,\ldots,N \tag{13}$$

и тогда следы ее степеней $\mathrm{Tr}L^k$ или кожффициенты характеристического многочлена $\det(\lambda - L)$ немедленно выдадут интегралы движения – симметрические функции импульсов.

Возникает естественный вопрос – можно ли как-то изменить (13), сделав систему нетривиальной, но сохраняя интегрируемость. Одним из удачных способов решения такой задачи является анзац

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{ij} &= p_i\delta_{ij} + (1-\delta_{ij})\alpha(q_i - q_j), \qquad i,j = 1,\ldots,N \\ A_{ij} &= \delta_{ij}\sum_k \beta(q_i - q_k) + (1-\delta_{ij})\gamma(q_i - q_j) \end{aligned} \tag{14}$$

подставляя который в уравнения Лакса достаточно легко убедиться, что канонические уравнения $p_i = \dot{q}_i$ выполняются при условии $\gamma(x) = \alpha'(x)$, следующем из сравнивания внедиагональных матричных элементов уравнения (1). Зануление диагональных элементов происходит автоматически, если выполняется еще и функциональное соотношение

$$\alpha(x)\alpha'(y) - \alpha(y)\alpha'(x) = (\beta(x) - \beta(y))\alpha(x+y) \tag{15}$$

на функции $\alpha(x)$ и четную $\beta(x) = \beta(-x)$. При этом вторая пара канонических уравнений приобретает вид

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial}{\partial q_i}\sum_{k\neq i} V'(q_i - q_k), \qquad V(q) = \alpha(q)\alpha(-q) \tag{16}$$

т.е.интегрируемая система (если найдутся нетривиальные решения соотношения (15)) представляет из себя систему попарно взаимодействующих частиц с гамильтонианом

$$H = \tfrac{1}{2}\sum_{i=1}^N p_i^2 + \sum_{i<j} V(q_i - q_j) \tag{17}$$

- У функциональных уравнений имеются очевидные решения, например
$$\alpha(x) = \frac{ig}{x}, \qquad \beta(x) = \frac{ig}{x^2} \tag{18}$$
или
$$\alpha(x) = \frac{igR}{\sinh Rx}, \qquad \beta(x) = \frac{igR^2}{\sinh^2(Rx)} \tag{19}$$
все устроенные так, что потенциал $V(q) = \alpha(q)\alpha(-q) \underset{q\to 0}{\sim} \frac{1}{q^2}$ имеет в нуле полюс второго порядка. Очевидно, скажем, что при $R \to 0$ решение (19) переходит в решение (18).

Системы частиц с полюсными потенциалами второго порядка называются системами Калоджеро-Мозера, и они интегрируемы (вспомним одномерную задачу с потенциалом $V(r) \sim \frac{1}{r^2}$, которая сводилась к свободному движению в плоскости).

- Решений уравнения (15) с полюсами второго порядка немного. Ольшанецкий и Переломов нашли эллиптическое решение, которое дает систему эллиптического Калоджеро с потенциалом

$$V(q) = g^2 \wp(q) \tag{20}$$

а рациональное и тригонометрические решения возникают при вырождениях тора.

- Однако самое существенное, что существует эллиптическое решение Кричевера со спектральным параметром

$$\alpha(x) = 2\Phi(x, z), \qquad \beta(x) = 2\wp(x) - \frac{1}{N-1}\wp(z) \tag{21}$$

где

$$\Phi(x, z) = \frac{\sigma(x-z)}{\sigma(x)\sigma(z)} e^{x\zeta(z)}, \qquad \Phi(x, z)\Phi(-x, z) = \wp(z) - \wp(x) \tag{22}$$

которое дает не только интегралы движения, но и уравнение саектральной кривой (3) рода $g = N$, которая N-кратно накрывает эллиптическую кривую.

13.5 Цепочка Тоды

Класс моделей Калоджеро (включающий обобщения того, что мы рассмотрели) фактически исчерпывает интегрируемые модели частиц с потенциалами вида (17), где "все взаимодействуют со всеми". Другим важнейшим классом интегрируемых моделей частиц являются цепочки Тоды, тесно связанные с алгебрами и группами Ли.

Цепочками Тоды называются модели взаимодействующих "соседних" частиц с экспоненциальным потенциалом, т.е. с гамильтонианом

$$H = \tfrac{1}{2} \sum_i p_i^2 + \sum_i e^{q_{i+1} - q_i} \tag{23}$$

интегрируемость которых следует из представления Лакса

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{ij} &= p_i\delta_{ij} + c_i\delta_{i+1,j} + c_{i-1}\delta_{i,j+1} \\ A_{ij} &= \tfrac{1}{2}c_i\delta_{i+1,j} - \tfrac{1}{2}c_{i-1}\delta_{i,j+1} \end{aligned} \tag{24}$$

где $c_i = \exp\left(\frac{1}{2}(q_{i+1} - q_i)\right)$. Операторы (24) представляют собой трехдиагональные матрицы, т.е. уравнение Лакса

$$\sum_j \mathcal{L}_{ij}\Psi_j = \lambda\Psi_i \tag{25}$$

является разностным уравнением второго порядка.

В данном примере получить спектральную кривую (или сделать оператор Лакса зависящим от спектрального параметра) помогает следующее соображение. Формально пока все формулы написаны как бы для бесконечной цепочки частиц, и если мы хотим ограничить ее на конечное число частиц N, то надо как-то определить граничные условия. Например, периодическим образом, т.е. сказать, что

$$q_{i+N} = q_i, \qquad p_{i+N} = p_i, \qquad \forall\ i \tag{26}$$

Следует также наложить граничные условия на решения линейной задачи (25), и спектральная теория операторов (или физика конденсированного состояния) подсказывает, что это должно быть условие *квази*-периодичности

$$\Psi_{i+N} = w\Psi_i, \qquad w \in \mathbb{C}^\times \tag{27}$$

где возникает еще одно комплексное число, так называемый квазиимпульс. Таким образом, мы можем считать набор $\{\Psi_i\}$ решением системы уравнений из (25) и (27), или собственным функциями *двух* операторов – оператора Лакса $\mathcal{L}$ и оператора сдвига $T = T_N$ на конечное число N вдоль цепочки.

Необходимым условием существования решения этой задачи (как и для пары Лакса) является коммутативность

$$[\mathcal{L}, T] = 0 \tag{28}$$

двух операторов. Когда Кричевер сформулировал это в 70-х, то выяснилось, что задача классификации коммутирующих операторов уже была решена за 50 лет до этого Бурнхалом и Чонди, которые доказали, что в этом случае найдется функция $F(\lambda, w)$, такая что

$$F(\mathcal{L}, T) = 0 \tag{29}$$

Это и есть уравнение спектральной кривой, вопрос только в том – как его технически получить.

Очевидный ответ: надо переписать оператор Лакса в базисе собственных функций оператора сдвига – при этом в нем появится зависимость от спектрального параметра или $\mathcal{L} = \mathcal{L}(w)$ собственного числа оператора сдвина T. Можно естественно поступить наоборот – записать оператор сдвига в базисе собственных функций оператора Лакса.

Задача: доказать, что в первом случае возникает уравнение

$$\det_{N\times N}(\lambda - \mathcal{L}(w)) = 0 \tag{30}$$

а во втором

$$\det_{2\times 2}(w - T(\lambda)) = 0 \tag{31}$$

которое имеет вид

$$w + \frac{1}{w} = P_N(\lambda) \tag{32}$$

т.е. задает гиперэллиптическую кривую рода $g = N - 1$, вложенную в $(\lambda, w) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^\times$.

Добавим ряд замечаний:

- При $N = 2$ эллиптическая кривая (32) $w + \frac{1}{w} = u$ буквально совпадает с той, что у нас возникала при интегрировании физического маятника.

- Операторы Лакса Тодовских систем строятся для любой простой или аффинной алгебры Ли по формуле

$$\mathcal{L} = p \cdot h + \sum_\alpha (e_\alpha + f_\alpha) e^{\alpha\cdot q/2} \tag{33}$$

  где (h, e, f) – генераторы Шевалле, а сумма идет по простым корням.

- Рассмотренные выше кривые для систем Тоды и Калоджеро возникают в теории Виттена-Зайберга при описании суперсимметричных калибровочных теорий поля с группами $SU(N)$.

13.6 Уравнение КдФ

Отметим наконец, что интегрируемость и представления Лакса возникают также в задачах с бесконечным числом степеней свободы, например для дифференциальных уравнений на функции $u = u(x)$ на прямой или окружности. Самый известный пример – пара Лакса для оператора Штурма-Лиувилля

$$L = \partial^2 + u, \qquad A = \partial^3 + \frac{3}{2}u\partial + \frac{3}{4}u_x \tag{34}$$

где $\partial = \partial/\partial x$, уравнение Лакса для которой приводит к

$$4u_t = 6uu_x + u_{xxx} \tag{35}$$

знаменитому уравнению Кортевега-де-Фриза. Заметим, что по-прежнему уравнение Лакса требует помимо самого уравнения (35) нетривиального сокращения коэффициентов, возникающих при старших степенях ∂.