КУРС АЛГЕБРЫ, ВШЭ (осень 2017)

ТЕМА 8. Кольца многочленов и подготовка к коллоквиуму 1

Задача 1. **Деление с остатком.**

1) Пусть $f(x) \in \mathbb{A}[x]$ – многочлен над кольцом $\mathbb{A}$. Предположим, что $(x-1)$ делит $f(x^n)$ в кольце $\mathbb{A}[x]$. Доказать, что (x^n-1) делит $f(x^n)$.

2) Пусть $n, m \geq 2$ и $f(x) = (x-2)^m + (x-1)^n - 1 \in \mathbb{Z}[x]$. Найти остаток от деления многочлена $f(x)$ на многочлен $(x-1)(x-2)$ в кольце $\mathbb{Z}[x]$.

Задача 2. **Многочлены над $\mathbb{F}_2$.**

1) Найти все неприводимые многочлены степени 2, 3 и 4 над полем $\mathbb{F}_2$.

2) Используя предыдущий результат, доказать, что многочлены
$5x^3+8x^2+3x+15$ и $x^5+2x^3+3x^2-6x-5$ неприводимые в кольце $\mathbb{Z}[x]$.

3) Найти нод(f, g) в кольце $\mathbb{F}_2[x]$ и его линейное представление $fu+gv$ где $u, v \in \mathbb{F}_2[x]$ для

а) $f = x^5+x^4+1$, $g = x^4+x^2+1$;

б) $f = x^5+x^3+x+1$, $g = x^4+1$.

Задача 3. **Многочлены над $\mathbb{F}_p$.**

1) Найти нод(f, g) в $\mathbb{F}_3[x]$ и $\mathbb{F}_5[x]$, где $f = x^4+1$, $g = x^3+x+1$.

2) Найти **число** неприводимых многочленов степени 2 и 3 над полями $\mathbb{F}_3$, $\mathbb{F}_5$ и $\mathbb{F}_p$, где p – простое.

3) Доказать, что в кольце многочленов над любым полем существуют бесконечно много неприводимых многочленов.

Задача 4. **Неприводимость и НОД в кольце $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$.** (*Обобщение и продолжение Задачи* 2 *Темы* 7.)

Пусть $d \in \mathbb{Z}$, $d \neq t^2$, где $t \in \mathbb{Z}$. Рассмотрим кольцо

$$\mathbb{Z}[\sqrt{d}] = \{a + b\sqrt{d} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}.$$

Для любого $z = a+b\sqrt{d}$ определим его сопряженное $\bar{z} = a - b\sqrt{d}$. Положим $N_d(z) = z\bar{z} = a^2 - b^2 d$.

0) Показать, что сопряжение $z \mapsto \bar{z}$ есть гомоморфизм кольца $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ и что $N_d(z_1 \cdot z_2) = N_d(z_1) \cdot N_d(z_2)$.

1) Доказать, что $z \in \mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ обратим в этом кольце тогда и только тогда, когда $N_d(z) = \pm 1$. Найти группы обратимых элементов $(\mathbb{Z}[\sqrt{-1}])^\times$ и $(\mathbb{Z}[\sqrt{-5}])^\times$.

2) Пусть p – простое. Доказать, что элементы $z \in \mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ такие, что $N_d(z) = \pm p$ являются неприводимыми в кольце $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$. Дать несколько примеров неприводимых элементов в $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$.

3) Доказать, что 3 и $2+\sqrt{-5}$ – неприводимые в $\mathbb{A} = \mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$. Найти нод$(3, 2+\sqrt{-5})$ в кольце $\mathbb{A}$.

4) Доказать, что идеал $I = (3, 2 + \sqrt{-5})$ не является главным в $\mathbb{A}$.

5) Найти все неприводимые элементы $\mathbb{A}$ такие, что $N_{-5}(z) = 9$.

6) Найти все неприводимые делители элементов 9 и $3 \cdot (2 + \sqrt{-5})$.

7) Доказать, что 9 и $3 \cdot (2 + \sqrt{-5})$ не обладают наибольшим общим делителем в кольце $\mathbb{A} = \mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$.