

## Задачи для подготовки к экзамену по группам и алгебрам Ли

Экзамен состоится в четверг 21 декабря с 17:00 до 20:00 в ауд. 108. В каждом варианте будет 4 задачи, похожие на некоторые из приведенных ниже.

1. Пусть  $G$  – группа ортогональных линейных преобразований  $\mathbb{R}^n$ , сохраняющих упорядоченную пару вложенных (одно в другое) подпространств размерностей 2 и 4. **а)** Найдите размерность группы Ли  $G$ . **б)** Найдите число компонент связности этой группы Ли.
2. **а)** Найдите все связные подгруппы Ли в группе аффинных преобразований прямой  $\mathbb{R}$ . **б)** Какие из них нормальны?
3. Найдите все идеалы (т.е. подпространства в алгебре Ли, замкнутые относительно всех операторов  $\text{ad } x$ ) **а)** алгебры Ли строго верхнетреугольных матриц  $3 \times 3$ ; **б)** алгебры Ли группы движений вещественной плоскости.
4. Найдите образ экспоненциального отображения для группы Ли из задачи 1 при  $n = 5$ .
5. **а)** Найдите центр универсальной обертывающей трехмерной алгебры Ли  $\mathfrak{a}$ , заданной в базисе как  $[x_1, x_2] = 2x_2$ ,  $[x_1, x_3] = -x_3 + x_2$ ,  $[x_2, x_3] = 0$ . **б)** Укажите какую-нибудь группу Ли с такой алгеброй Ли. **в)** Выпишите левоинвариантные векторные поля на этой группе Ли, соответствующие  $x_1, x_2, x_3$  в каких-нибудь координатах в окрестности единицы. **г)** Выпишите меру Хаара на этой группе Ли в каких-нибудь координатах в окрестности единицы. **д)** Может ли такая группа быть компактной?
6. Пусть  $V_\lambda$  – неприводимое представление алгебры Ли  $\mathfrak{sl}_2$  со старшим весом  $\lambda$ . Разложите в прямую сумму неприводимых представлений **а)**  $S^2(V_5)$ ; **б)**  $\Lambda^3(V_5)$ .
7. Пусть  $E, H, F$  – стандартный базис алгебры Ли  $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ . Найдите все собственные значения элемента  $E^2 F^2 H^2 + E^3 H^3 \in U(\mathfrak{sl}_2)$  в представлении алгебры Ли  $\mathfrak{sl}_2$  со старшим весом 6.
8. Пусть  $E, H, F$  – стандартный базис алгебры Ли  $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ . Найдите все собственные значения элемента  $E \otimes F + F \otimes E + \frac{1}{2}H \otimes H$  в тензорном произведении  $V_5 \otimes V_4$  представлений алгебры Ли  $\mathfrak{sl}_2$ .
9. Найдите все собственные значения элемента универсальной обертывающей алгебры  $\sum_{i,j=1}^3 E_{ij} E_{ji} \in U(\mathfrak{gl}_3)$  в тензорном квадрате тавтологического представления  $\mathbb{C}^3 \otimes \mathbb{C}^3$ .
10. **а)** Вычислите характер неприводимого представления унитарной группы  $U_4$  со старшим весом  $\lambda = (3, 2, 1, 0)$ . **б)** Выразите этот характер через элементарные симметрические функции.
11. Найдите кратность веса  $(2, 2, 2)$  в представлении унитарной группы  $U_3$  со старшим весом  $\lambda = (4, 2, 0)$ .
12. Найдите размерности неприводимых компонент в разложении на неприводимые представления  $U_3$  в пространстве  $S^2 \mathbb{C}^3 \otimes \mathbb{C}^3$ .