

Динамические системы и эргодическая теория

1 Порядок сдачи экзамена

1. Список задач, приведенный ниже, - это задачи к экзамену для тех студентов, которые записаны на курс, но не выступали в течение семестра с докладами. Если Вы не знаете, нужно ли Вам решать задачи из списка, напишите на askripchenko@hse.ru - я уточню Ваш статус.
2. Экзамен состоится 21 декабря 2017 года и начнется в 10:30. Если Вам неудобно предложенное время, напишите на askripchenko@hse.ru - мы обсудим альтернативные варианты.
3. Экзамен состоит из четырех условных частей (фуксовы группы и гиперболическая геометрия, эргодическая теория, теихмюллерова динамика, однородная динамика). Минимум для получения оценки 4: решение хотя бы 2 задач (причем они должны быть из разных разделов). Минимум для получения оценки 6: решение 3 задач (по 1 из трех раздела) Для получения оценки 8 необходимо решить хотя бы 1 задачу из каждого раздела. Для получения оценки 10 нужно решить две дополнительные (к необходимым для 8) задачи.
4. Присылать решения заранее не нужно, все решения мы обсудим во время экзамена.

2 Задачи

2.1 Фуксовы группы

1. Доказать, что любая фуксова подгруппа группы $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$, содержащая только тождественный и эллиптические элементы, является конечной циклической группой.

2.2 Эргодическая теория

1. Рассмотрим стандартный тор $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/(\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z})$. Рассмотрим отображение $R(x, y) : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$, заданное формулой $R(x, y) = (x + \alpha, y + \beta)$.

Найти замыкание орбиты этого отображения в зависимости от параметров (α, β) .

2.3 Тейхмюллерова динамика

1. На плоскости нарисована ломаная, состоящая из нескольких отрезков, и её 'перестановка' - другая ломаная с началом в той же точке, составленная из тех же отрезков, переставленных в соответствии с заданной перестановкой π . В предположении, что две эти ломаные задают многоугольник, найти конические углы плоской поверхности, склеенной из полученного многоугольника. (Конкретная перестановка будет предложена на экзамене. Можете потренироваться на $\pi = (4, 3, 7, 6, 5, 2, 1)$.)
2. Рассмотрим перестановку из d элементов вида $\pi(i) = d + 1 - i$ для $i = 1, \dots, d$. Найти род поверхности и типы особенностей для плоской поверхности, заданной перекладыванием с перестановкой π . Найти неподвижные точки гиперэллиптической инволюции (точки Вейерштрасса) и доказать гиперэллиптичность поверхности.
3. Нарисовать граф Розы для случая $g = 2, d = 4$ (здесь g - род поверхности, d - число отрезков перекладывания).

2.4 Однородная динамика

Хедлунд доказал, что верна следующая теорема:

Рассмотрим однородное пространство $X = \Gamma \backslash SL(2, \mathbb{R})$. Тогда орициклический поток или периодический, или плотный в X , и соответствующая мера μ_X (которая получается как pushforward из меры Хаара) эргодична.

1. Вывести из теорем Ратнер и теоремы Хедлунда теорему Фюрстенберга о строгой эргодичности орициклического потока для компактного X .
2. Вывести из теорем Ратнер и теоремы Хедлунда теорему Дани - Смайли для некомпактного X : любая эргодическая вероятностная мера, инвариантная относительно орициклического потока, либо совпадает с μ_X , либо живет на периодической орбите.