Лекция 15. Комплексные числа

Комплексные числа - бедные родственники в программе математического образования. Для школьной программы они считаются слишком трудными, а для университета - слишком легкими. Мы хотим восполнить этот пробел.

Возникает вопрос: почему сейчас? Почему, поднявшись на вершину дифференуиального исчислния изучив формулу Тейлора, мы опускаемся в элементарный мир комплексных чисел? Ответ: от многочленов Тейлора естественно перейти к бесконечным рядам, называемым степенными. Эти ряды естественно изучать как функции комплексного переменного. А для этого нужно твердо стоять на комплексной плоскости.

1 Определение.

Определение 1 *Комплексное число - это упорядоченная пара вещественных, или символ $z = x + iy$, где i - мнимая единица: $i^2 = -1$; x называется действительной, а y - мнимой частью z.*

Это определение становится содержательным, если сказать, что можно делать с комплексными числами, точнее, определить арифметические действия над ними.

Определение 2 *Сложение комплексных чисел происходит покомпонентно, а умножение - по распределительному закону, с учетом равенства $i^2 = -1$. Точнее, пусть $z_1 = x_1 + y_1,\ z_2 = x_2 + y_2$. Тогда*

$$z_1 + z_2 = (x_1 + y_1) + i(y_1 + y_2),$$

$$z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_1 + x_2 y_2)$$

2 Поле комплексных чисел.

Множество всех комплексных чисел обозначается $\mathbb{C}$.

Напомним аксиомы поля.

1. Определено коммутативное и ассоциативное сложение.
2. Существует нейтральный элемент 0, прибавление которого к любому числу не меняет этого числа.
3. Для каждого числа z существует противоположное, обозначаемое $-z$, добавление которого к z дает ноль.

4. Определено коммутативное и ассоциативное умножение.

5. Существует нейтральный элемент 1, умножение которого на любое число не меняет этого числа.

6. Для каждого ненулевого числа z существует обратное, умножение которого на z дает 1.

7. Распределительный закон: $\forall\ z_1 z_2 z_3$

$$z_1(z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3. \tag{1}$$

Теорема 1 *Комплексные числа образуют поле.*

Доказательство Мы не будем доказывать все подробно. Первые три аксиомы говорят, что $\mathbb{C}$ - абелева группа по сложению. Это следует из аналогичного свойства для $\mathbb{R}$ и, в конечном счете, для Q.

Следующие три аксиомы говорят, что $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ - коммутативная группа по умножению. Ниже мы докажем коммутативность и ассоциативность умножения комплексных чисел, а здесь только проверим существование обратного элемента.

$$\frac{1}{x+iy} = \frac{x-iy}{(x+iy)(x-iy)} = \frac{x-iy}{x^2+y^2}.$$

Здесь $z = x + iy,\ \bar{z} = x - iy$ - сопряженное к z, $x^2 + y^2 = z\bar{z} := |z|^2$.

Эту выкладку не надо обосновывать. Она нужна как мнемонический прием лоя запоминания формулы для обратного комплексного числа. Существование обратного доказывается выкладкой:

$$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2};\ z \cdot \frac{1}{z} = \frac{z\bar{z}}{|z|^2} = 1.$$

Распределителшьный закон проверяется “в лоб”. $\square$

3 Задачи.

1. Докажите, что переход к сопряженному - отображение $z \to \bar{z}$ - является автоморфизмом поля комплексных чисел, и одновременно – симметрией относительно вещественной оси.

2. Найдите все непрерывные автоморфизмы группы вещественных чисел по сложению.

3. * Найдите все непрерывные автоморфизмы группы комплексных чисел по сложению.

4. ** Найдите все непрерывные автоморфизмы группы $\mathbb{C}^*$ комплексных чисел по умножению.

5. Докажите, что единичная окружность – множество $\{z||z|=1\}$ – является замкнутой подгруппой группы $\mathbb{C}^*$.

4 Геометрия комплексных чисел.

Координатная плоскость $\mathbb{R}^2$ изображает множество $\mathbb{C}$ (комплексную прямую), если положить $(x,y) \equiv x+iy$. Комплексные числа становятся векторами на плоскости. Полярный радиус вектора z - это модуль комплексного числа z; обозначается $|z|$. Полярный угол вектора z - это аргумент комплексного числа z; обозначается $\arg z$. Аргумент определен однозначно по модулю 2π. Неоднозначность аргумента играет важную роль в дальнейшем.

Теорема 2 *Комплексные числа складываются по правилу параллелограмма.*

Докажите!

Теорема 3 *При умножении комплексных чисел модули перемножаются, а аргументы складываются.*

Доказательство Пусть $z=x+iy,\ |z|=r,\ \arg z=\varphi$. Тогда

$$z = r(cos\varphi + i\sin\varphi)$$

(тригонометрическая форма комплексного числа). Пусть $w=u+iv=\rho(\cos\psi+i\sin\psi)$. Тогда

$$zw = r\rho[(\cos\varphi\cos\psi-\sin\varphi\sin\psi)+i(\cos\varphi\sin\psi+\sin\varphi\cos\psi)] = r\rho(\cos(\varphi+\psi)+i\sin(\varphi+\psi)).$$

□

Задача 1 *Что происходит с модулями и аргументами комплексных чисел при делении? при переходе к сопряженному?*

5 Умножение на комплексное число как геометрическое преобразование.

Меня со школьных лет не удовлетворяло предыдущее доказательство. Прозрачный факт обосновывается с помощью выкладки, смысл которой спрятан в тригонометрии. Вот доказательство, начало которого предложено Арнольдом.

Теорема 4 *Преобразование плоскости, задаваемое умножением на число z по модулю равное 1 - это поворот на угол $\arg z$.*

Доказательство Отображение $R_z : w \mapsto wz,\ w \in \mathbb{C}$ сохраняет расстояния. Действительно, квадрат длины отрезка $[w_1, w_2]$ - это

$$|w_1 - w_2|^2 = (w_1 - w_2)(\bar{w}_1 - \bar{w}_2).$$

Следовательно,

$$|zw_1 - zw_2|^2 = (w_1 - w_2)z(\bar{w}_1 - \bar{w}_2)\bar{z} = (w_1 - w_2)(\bar{w}_1 - \bar{w}_2)z\bar{z} = |w_1 - w_2|^2$$

Отображение R_z (R - от rotation) - это движение плоскости, сохраняющее 0 неподвижным. Такое движение - либо поворот (ориентация сохраняется), либо симметрия (ориентация меняется). Докажем, что R_z сохраняет ориентацию.

При $z = \pm 1$ это очевидно. При $\arg z \in (0, \pi)$ это доказывается так. Ориентация плоскости задается упорядоченной парой неколлинеарных векторов (одинаковой длины). Две пары задают одинаковую ориентацию, если второй вектор каждой пары получается из первого поворотом в одном и том же направлении. Пара $(1, z)$ задает ту же ориентацию, что и пара $\bar{z}, 1$: второй вектор из первого получается поворотом на угол $\arg z$. Но первая пара получается из второй умножением на z. Значит R_z - движение, сохраняющее ориентацию с неподвижной точкой 0, переводящее 1 в z. Такое движение только одно - поворот на $\arg z$.

Пусть теперь $\arg z \in (\pi, 2\pi)$. Тогда $\arg \bar{z} \in (0, \pi)$. Для умножения на $\bar{z}$ теорема доказана. Но умножение на z - преобразование, обратное к предыдущему Значит, для него теорема тоже доказана. □

Следствие 1 *Умножение на произвольное комплексное число - это поворот на его аргумент и растяжение с коэффициентом, равным его модулю.*

6 Элементарная геометрия на языке комплексных чисел.

Задача 2 *Доказать, что $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ (неравенство треугольника)*

Задача 3 *Даны z_1 и $z_2 \in \mathbb{C}$.*

а) Найдите множество всех таких z, что $|z - z_1| = |z - z_2|$ (Найти геометрическое место точек, равноудаленных от двух данных).

б) Даны z_1 и $z_2 \in \mathbb{C}$. а) Найдите множество всех таких z, что $|z - z_1| + |z - z_2| = |z_1 - z_2|$.

в) Даны z_1 и $z_2 \in \mathbb{C}$. а) Найдите множество всех таких z, что $|z - z_1| - |z - z_2| = |z_1 - z_2|$.

**г)* $\frac{|z-z_1|}{|z-z_2|} = 2.$

д) Пусть $z_1 z_2 \neq 0$. *Найдите множество всех таких* z, *что*

$$\arg\frac{z}{z_1} = \arg\frac{z_2}{z}$$

Задача 4 *Докажите, что единичная окружность - это подгруппа группы* $\mathbb{C}^*$.

7 Формула Муавра.

Теорема 5 *При возведении комплексного числа в степень* n *его модуль возводится в степень* n, *а аргумент умножается на* n: *если* $|z| = r,\ \arg z = \varphi$, *то*

$$|z^n| = r^n,\ \arg z^n = n\varphi;$$

$$z^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi).$$

Следствие 2 *Функции* $\cos n\varphi$ *и* $\sin n\varphi$ *являются многочленами от* $\cos\varphi$ *и* $\sin\varphi$; *они находятся по формуле бинома из формулы Муавра:*

$$\cos n\varphi + i\sin n\varphi = (\cos\varphi + i\sin\varphi)^n$$

Задача 5 *Докажите, что* $\cos nx$ *является многочленом от* $\cos x$, *и этот многочлен имеет* n *корней на отрезке* $[-1, 1]$.

8 Извлечение корней.

Корни из комплексного числа извлекаются с помощью формулы Муавра. Решим уравнение:

$$z^n = w.$$

Пусть $|z| = r,\ \arg z = \varphi,\ |w| = R,\ \arg w = \psi$. По формуле Муавра, как кажется, $r^n = R,\ n\varphi = \psi$. Следовательно,

$$r = \sqrt[n]{R},$$

имеется в виду арифметический корень; кажется также, что

$$\varphi = \frac{\psi}{n}.$$

Но здесь вступает в игру неоднозначность аргумента. Наряду с ψ, любой угол $\psi + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$, является аргументом w. Поэтому правильным является уравнение

$$n\varphi = \psi(\mod 2\pi).$$

Его решения, различные по модулю 2π - это

$$\varphi_0 = \frac{\psi}{n},\ \varphi_1 = \frac{\psi + 2\pi}{n}, \ldots, \varphi_n = \frac{\psi + 2\pi(n-1)}{n}.$$

Задача 6 *Корни n-й степени из числа w лежат на окружности радиуса $r = \sqrt[n]{|w|}$ в вершинах правильного n-угольника (докажите)!*

Задача 7 *Докажите, что корни n-й степени из 1 образуют группу по умножению.*

Задача 8 **Докажите, что любая группа из n комплексных чисел по умножению имеет такой вид.*

Задача 9 *Найдите сумму всех корней n-й степени из $1,\ n > 1$.*