

Задачи к спецкурсу "Категории и универсальная алгебра" (2017)

1. Пусть F - отображение, переводящее объекты и морфизмы категории $\mathcal{C}$ соответственно в объекты и морфизмы категории $\mathcal{D}$. Известно, что F сохраняет начала, концы и композиции. Известно также, что для некоторого объекта A из $\mathcal{C}$

$$\mathcal{D}(F(A), F(A)) = F[\mathcal{C}(A, A)]$$

Докажите, что $F(1_A) = 1_{F(A)}$.

2. Докажите, что категория SET не изоморфна никакой полной подкатегории в SET^* .
3. Докажите, что объект, изоморфный начальному, - начальный.
4. а) Существует ли полная подкатегория в SET, содержащая ровно 100 стрелок?
б) То же - для 20 стрелок.
5. Докажите, что если в категории все стрелки - изо, то она изоморфна своей двойственной.
6. Постройте категорию, содержащую полные подкатегории с любым конечным числом стрелок.
7. Постройте категорию с единственным объектом, которая не является локально малой.
8. Докажите, что ковариантный функтор множества-степени $\mathcal{P}$ является вложением SET в себя. (Определение $\mathcal{P} : \mathcal{P}(X)$ – множество всех подмножеств X ; если $f: X \rightarrow Y$, то $\mathcal{P}(f) : \mathcal{P}(X) \rightarrow \mathcal{P}(Y)$ – отображает каждое множество $Z \subset X$ в его образ $f[Z]$.)
9. Докажите, что категория SET^* конкретизируема.
(Указание: используйте контравариантный функтор множества-степени Q , который на объектах действует как $\mathcal{P}$; а если $f: X \rightarrow Y$, то $Q(f) : \mathcal{P}(Y) \rightarrow \mathcal{P}(X)$ – отображает каждое множество $Z \subset Y$ в его прообраз $f^{-1}[Z]$.)
10. а) Докажите, что категории SET и SET^* неэквивалентны.
б) Эквивалентны ли категории FINSET и $FINSET^*$?
11. Рассмотрим категорию pSET множеств с отмеченной точкой: ее объекты – множества с отмеченной точкой, а стрелки из (X, x) в (Y, y) – это отображения X в Y , переводящие x в y .
(а) Постройте забывающий функтор $U: pSET \rightarrow SET$. Отражает ли он изоморфизмы?
(б) Докажите, что pSET и SET не эквивалентны.
12. Докажите, что pSET эквивалентна категории, в которой объекты - множества, а морфизмы - частичные функции.
13. По предкатегории $\mathcal{D}$ определим категорию путей $\mathcal{D}^+$ (в другой терминологии: свободную категорию, порожденную $\mathcal{D}$) следующим образом: объекты в ней - те же, что в $\mathcal{D}$, а морфизмы из x в y – это пути, т.е. конечные последовательности стрелок из $\mathcal{D}$, в которых конец каждой стрелки совпадает с началом следующей. Композиция путей – это их соединение; тождественный путь из x в x – это пустая последовательность с началом x (такие тоже разрешены).
а) Докажите, что $\mathcal{D}^+$ - категория.

- б) Докажите, что если $\mathcal{D}$ -категория, то из $\mathcal{D}^+$ можно получить категорию, изоморфную $\mathcal{D}$, отождествив некоторые стрелки.
14. Дайте определение композиции функторов и докажите, что композиция функторов – функтор.
15. Дайте определение обратного функтора и докажите, что функтор имеет обратный, если и только если он является изоморфизмом категорий.
16. а) Пусть $\mathbf{MON}$ — категория моноидов и гомоморфизмов, $U: \mathbf{MON} \rightarrow \mathbf{SET}$ — забывающий функтор. Докажите, что U отражает изоморфизмы.
 б) Пусть $\mathbf{VEC}_K$ — категория векторных пространств и линейных отображений над полем K , $U: \mathbf{VEC}_K \rightarrow \mathbf{SET}$ — забывающий функтор. Верно ли, что U отражает изоморфизмы?
17. Постройте полное вложение категории $\mathbf{MON}$ моноидов и гомоморфизмов в категорию $\mathbf{CAT}$.
18. *Монотонное отображение* предпорядка (X, R) в предпорядок (X', R') — это функция $f: X \rightarrow X'$, такая что если xRy , то $f(x)R'f(y)$. Постройте полное вложение категории $\mathbf{POS}$ предпорядков и монотонных отображений в $\mathbf{CAT}$.
19. Пусть $\mathbf{OS}$ — категория частичных порядков (полная подкатегория $\mathbf{POS}$), $U: \mathbf{OS} \rightarrow \mathbf{SET}$ — забывающий функтор. Докажите, что U не отражает изоморфизмы.
20. Постройте полное вложение $\mathbf{SET}$ в $\mathbf{POS}$.
21. Для функторов $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ и $G: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{E}$ комма-категория $F \downarrow G$ определяется следующим образом.

Объекты $F \downarrow G$ – тройки вида (A, f, B) , где $f: FA \rightarrow GB$;

морфизмы (A, f, B) в (A', f', B') – это пары (a, b) , где $a: A \rightarrow A'$, $b: B \rightarrow B'$,

для которых коммутативен квадрат

$$\begin{array}{ccccc} & & Fa & & \\ FA & \rightarrow & FA' & & \\ f \downarrow & & \downarrow f' & & \\ & & Gb & & \\ GB & \rightarrow & GB' & & \end{array}$$

Тождественный морфизм для (A, f, B) определяется как $(1_A, 1_B)$.

Композиция определяется покомпонентно: $(a, b) \cdot (c, d) = (a \cdot c, b \cdot d)$

Проверьте, что это определение задает категорию.

22. Частный случай комма-категории, *категория стрелок* для $\mathcal{C}$, обозначается $\mathcal{C}^{\rightarrow}$ и определяется как $1_{\mathcal{C}} \downarrow 1_{\mathcal{C}}$.
 Докажите, что морфизм (a, b) в $\mathcal{C}^{\rightarrow}$ является изоморфизмом, если и только если a, b – изоморфизмы в $\mathcal{C}$.
23. а) Докажите, что если $\mathcal{C}$ имеет начальный объект, то и $\mathcal{C}^{\rightarrow}$ имеет начальный объект.
 б) Найдите все начальные объекты в $\mathbf{SET}^{\rightarrow}$.
24. а) Докажите, что если $\mathcal{C}$ имеет финальный объект, то и $\mathcal{C}^{\rightarrow}$ имеет финальный объект.
 б) Найдите все финальные объекты в $\mathbf{SET}^{\rightarrow}$.
25. Докажите, что $(\mathcal{C}^{\circ})^{\rightarrow} \cong (\mathcal{C}^{\rightarrow})^{\circ}$.

26. Постройте функторы **dom, cod**: $\mathcal{C}^{\rightarrow} \rightarrow \mathcal{C}$, переводящие каждую стрелку соответственно в ее начало и конец. Докажите, что эти функторы не обязательно полны и не обязательно унивалентны.
27. Пусть A объект категории $\mathcal{C}$. Категория $\mathcal{C} \downarrow A$ стрелок над A это подкатегория в $\mathcal{C}^{\rightarrow}$, объекты которой – стрелки с концом A , а стрелки имеют вид $(\alpha, 1_A)$. Постройте забывающий (про A) функтор $U: \mathcal{C} \downarrow A \rightarrow \mathcal{C}$. Постройте функтор $F: \mathcal{C} \downarrow A \rightarrow \mathcal{C}^{\rightarrow}$, такой что $F \cdot \text{dom} = U$ (см. предыдущую задачу).
28. Докажите, что если A – финальный объект, то $U: \mathcal{C} \downarrow A \cong \mathcal{C}$.
29. Для малой категории $\mathcal{C}$ постройте функтор $\mathcal{C} \downarrow (-): \mathcal{C} \rightarrow \text{CAT}$, переводящий A в $\mathcal{C} \downarrow A$. Является ли он вложением?
30. Постройте забывающий функтор $U: \text{CAT} \rightarrow \text{SET}$. Покажите, что $\mathcal{C} \downarrow (-) \cdot U$ – вложение (“функтор Кэли” из лекции 3).
31. Пусть $(X, \leq)$ – частичный порядок, $\mathcal{C} = \text{CPO}(X, \leq)$ – соответствующая ему категория. Докажите, что $\mathcal{C} \downarrow a \cong \text{CPO}((X, \leq) \downarrow a)$, где $(X, \leq) \downarrow a$ – ограничение $(X, \leq)$ на множество $\{x \mid x \geq a\}$.
32. Пусть A объект категории $\mathcal{C}$. Дайте определение категории $A \uparrow \mathcal{C}$ стрелок под A . Докажите, что $(A \uparrow \mathcal{C})^{\circ} \cong \mathcal{C}^{\circ} \downarrow A$.
33. Докажите, что $\text{pSET} \cong \{a\} \uparrow \text{SET}$ (см. задачу 11).
34. Рассмотрим функторы $\text{Hom}(A, -)$ из SET в SET . Докажите, что если A непусто, то $\text{Hom}(A, -)$ – вложение категорий. Что можно сказать про $\text{Hom}(\emptyset, -)$?
35. При каких A функтор из предыдущей задачи является полным?
36. Рассмотрим категорию Mat_K , объекты которой – натуральные числа, объект 0 – начальный и финальный, морфизмы из m в n – $(n \times m)$ -матрицы над полем K , композиция морфизмов $A \cdot B$ между ненулевыми объектами – это произведение матриц BA (а с нулевым объектом и так все ясно). Докажите, что Mat_K эквивалентна категории VEC_K векторных пространств над K и линейных отображений.
37. Рассмотрим категорию $\mathcal{C} = \text{FINVEC}_K$ конечномерных векторных пространств над полем K .
 (а) Докажите, что если $\dim A = 1$, то $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(-, A)$ – эквивалентность ($\mathcal{C}^{\circ}$ и $\mathcal{C}$).
 (б) Как это связано со стандартными понятиями из линейной алгебры? (в) Как преобразуется матрица линейного отображения при действии этого функтора?
38. Докажите, что категория $\text{VEC}_{\mathbb{R}}$ не эквивалентна своей двойственной.
39. Пусть $(A \times B, p_A, p_B)$ – произведение A и B (как конус), f – изоморфизм X на $A \times B$. Докажите, что $(X, f \cdot p_A, f \cdot p_B)$ – произведение A и B .
40. (а) Докажите, что если в категории существуют произведения любых 2 объектов, то существуют произведения любых 3 объектов, причем $A \times B \times C \cong (A \times B) \times C \cong A \times (B \times C)$.

- (b) Докажите, что если в категории существует финальный объект и произведения любых 2 объектов, то существуют произведения любого конечного семейства объектов.
41. В категории с произведениями и суммами постройте функторы $(A \times _)$, $(A + _)$, такие что для любого объекта X
 $(A \times _)(X) = A \times X$, $(A + _)(X) = A + X$.
42. Докажите, что CAT - категория с конечными произведениями и суммами.
43. Докажите, что в категории абелевых групп ABGR прямая сумма двух групп является их произведением и суммой.
44. Докажите, что в категории MON моноидов для любого семейства объектов существует произведение.
45. Найдите
 а) сумму $\mathbf{N} + \mathbf{N}$ (с операцией сложения) в категории MON,
 б) сумму $\mathbf{Z} + \mathbf{Z}$ в категории групп GROUP.
46. Что можно сказать о произведении, если один из сомножителей
 а) финальный объект ? б) начальный объект ?
47. Докажите, что если категория $\mathcal{F}$ имеет начальный объект, то любая диаграмма вида $\mathbf{D}: \mathcal{F} \rightsquigarrow \mathcal{C}$ имеет предел.
48. Является ли категория MON конечно полной?
49. *Антидискретная категория* – это категория, в которой все объекты нулевые (начальные и финальные). Докажите, что всякая антидискретная категория полна.
50. Пусть $(X, \leq)$ - частичный порядок. Докажите:
 (i) $c = a \times b$ в категории $\text{CPO}(X, \leq) \Leftrightarrow c = \inf(a, b)$ в $(X, \leq)$,
 (ii) $c = a + b$ в категории $\text{CPO}(X, \leq) \Leftrightarrow c = \sup(a, b)$ в $(X, \leq)$.
51. Докажите, что
 (а) если $(X, \leq)$ - линейный порядок, то категория $\text{CPO}(X, \leq)$ конечно полна;
 (б) если $(X, \leq)$ - конечный линейный порядок, то категория $\text{CPO}(X, \leq)$ полна;
52. Постройте бесконечный линейный порядок $(X, \leq)$, для которого $\text{CPO}(X, \leq)$ полна.
53. Если в категории существует произведение $A \times A$, то *диагональный морфизм* для A (обозначение: Δ_A) – это $\langle 1_A, 1_A \rangle : A \longrightarrow A \times A$. Докажите, что Δ_A – уравниватель пары проекций $p_1, p_2 : A \times A \longrightarrow A$.

Говорят, что категория $\mathcal{C}$ - с конечными произведениями, если в ней существуют произведения любых двух объектов (а значит, и любые конечные произведения — задача 41). Категория $\mathcal{C}$ - с уравнивателями, если в ней существуют уравниватели любых двух смежных стрелок (т.е. стрелок с общим концом и началом).

54. Докажите, что конечная категория с одним объектом - с конечными произведениями, если и только если она дискретна.
55. Приведите пример нетривиального моноида G , для которого категория $\text{CM}(G)$ - с конечными произведениями. (Указание: можно использовать преобразования $\mathbf{N}$ и канторовскую нумерацию пар.)
56. Докажите, что если G — группа и категория $\text{CM}(G)$ — с уравнителями, то G тривиальна.
57. Докажите, что если G — нетривиальный моноид и категория $\text{CM}(G)$ — с уравнителями, то G бесконечен.
58. *Монострелка (моморфизм)* в категории $\mathcal{C}$ - это стрелка, которая превращается в инъекцию под действием любого Hom -функтора $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, -)$.
 - (а) Докажите, что $\alpha : A \longrightarrow B$ – монострелка, если и только если на нее можно сокращать справа, т.е. для любых стрелок β, γ ($\beta \cdot \alpha = \gamma \cdot \alpha \Rightarrow \beta = \gamma$).
 - (б) Докажите, что композиция монострелок – монострелка.
 - (в) Докажите, что если $\beta \cdot \alpha$ – монострелка, то β – монострелка.
59. Докажите, что монострелки в категории $\mathcal{C} \downarrow A$ получаются из монострелок в $\mathcal{C}$.
60. Сформулируйте определение *эпистрелки* как двойственного понятия к монострелке и аналог задачи 58 для эпистрелок.
61. Докажите, что в категории SET эпистрелки – это сюръекции.
62. Какие функторы являются монострелками в CAT ?
63. Докажите, что если категория $\mathcal{C}$ полна, то и любая категория $\mathcal{C} \downarrow A$ полна.
64. Докажите, что если функтор сохраняет произведения и уравнители, то он сохраняет пределы.
65. Пусть $(X, \alpha_i, A_i)_{i \in I}$ – конус в категории $\mathcal{C}$ над семейством объектов $(A_i)_{i \in I}$. Докажите, что если для любого объекта A категории $\mathcal{C}$ конус $(\text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, X), (\alpha_i)_*, \text{Hom}(A, A_i))$ является произведением в SET , то $(X, \alpha_i, A_i)_{i \in I}$ – произведение в $\mathcal{C}$.
66. Докажите, что эквивалентность категорий сохраняет пределы.
67. Докажите, что изоморфизм функторов сохраняет унивалентность и полноту.
68. Докажите, что всякий функтор, естественно изоморфный эквивалентности, — эквивалентность.
69. Докажите, что если функтор $\mathbf{F}$ сохраняет пределы над схемой $\mathcal{J}$ и $\mathbf{G} \cong \mathbf{F}$, то и $\mathbf{G}$ сохраняет пределы над $\mathcal{J}$.
70. Докажите, что изоморфизм категорий обладает левым и правым сопряженным функторами.
71. (а) Сформулируйте определение морфизма диаграмм (в данной категории с данной схемой) по аналогии с морфизмом функторов.

- (б) Докажите, что если диаграмма имеет предел, то и любая изоморфная ей диаграмма имеет предел, и эти пределы изоморфны.
72. (а) Докажите, что если функторы $\mathbf{F}, \mathbf{G} : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ естественно изоморфны и $\mathbf{H} : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{E}$, то и $\mathbf{F} \cdot \mathbf{H}, \mathbf{G} \cdot \mathbf{H}$ естественно изоморфны.
- (б) Докажите, что если функторы $\mathbf{F}, \mathbf{G} : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ естественно изоморфны и $\mathbf{H} : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{C}$, то и $\mathbf{H} \cdot \mathbf{F}, \mathbf{H} \cdot \mathbf{G}$ естественно изоморфны.
73. Докажите, что если $\mathbf{F}, \mathbf{G} : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ - произвольные функторы, $\mathbf{H} : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{E}$ - полный унивалентный, и $\mathbf{F} \cdot \mathbf{H}, \mathbf{G} \cdot \mathbf{H}$ естественно изоморфны, то и $\mathbf{F}, \mathbf{G}$ естественно изоморфны.
74. Докажите, что если $\mathbf{F} : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ естественно изоморфен $\mathbf{1}_{\mathcal{C}}$, то $\mathbf{F}$ - эквивалентность.
75. Докажите, что всякая эквивалентность $\mathbf{SET} \rightarrow \mathbf{SET}$ естественно изоморфна тождественному функтору $\mathbf{1}_{\mathbf{SET}}$.
76. Пусть $\mathbf{CM}(G)$ - категория с одним объектом, ассоциированная с группой G . Докажите, что функторы в этой категории, естественно изоморфные тождественному, - это внутренние автоморфизмы группы G (т.е. отображения вида $x \mapsto a^{-1}xa$).
77. Пусть $\tau : \mathbf{Hom}(A, -) \xrightarrow{\sim} \mathbf{Hom}(B, -)$ - естественное преобразование. Докажите, что $\tau_A(1_A) : B \rightarrow A$ - изоморфизм.
78. Докажите, что существует единственный морфизм $\mathbf{1}_{\mathbf{SET}} \xrightarrow{\sim} \mathbf{1}_{\mathbf{SET}}$.
79. Докажите, что тождественный функтор $\mathbf{1}_{\mathbf{VEC}_K}$ представим.
80. Докажите, что тождественный функтор $\mathbf{1}_{\mathbf{GROUP}}$ представим.
81. Докажите, что тождественный функтор $\mathbf{1}_{\mathbf{ALG}}$ представим.
82. Постройте категорию $\mathcal{C}$, для которой тождественный функтор $\mathbf{1}_{\mathcal{C}}$ не представим.
83. Докажите, что функтор $Q : \mathbf{SET}^{\circ} \rightarrow \mathbf{SET}$ (задача 9) представим.
84. Докажите, что функтор $\mathcal{P} : \mathbf{SET} \rightarrow \mathbf{SET}$ (задача 8) самосопряжен.
85. Докажите, что функтор $\mathcal{P} : \mathbf{SET} \rightarrow \mathbf{SET}$ (задача 8) не представим.
86. Постройте естественное преобразование $\mathbf{1}_{\mathbf{SET}} \xrightarrow{\sim} \mathcal{P}$ (см. задачу 8).
87. Докажите, что если $\mathbf{F}_1 \dashv \mathbf{G}$ и $\mathbf{F}_1 \cong \mathbf{F}_2$, то $\mathbf{F}_2 \dashv \mathbf{G}$.

88. Докажите, что для любого множества A категория функторов $\text{SET}^{\text{Dis}(A)}$ (где $\text{Dis}(A) = \text{CPO}(A, =)$ – дискретная категория на A) эквивалентна категории стрелок $A \uparrow \text{SET}$.
89. *Конгруэнция* в категории – это отношение эквивалентности на стрелках, согласованное с концами, началами и композицией.
- (а) Дайте определение факторкатегории по конгруэнции.
- (б) Постройте биективный на объектах и полный функтор из категории $\mathcal{C}$ на факторкатегорию $\mathcal{C}/\sim$.
90. (продолжение задачи 84). Для функтора $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ определите ядерную конгруэнцию $\sim_F$. С ее помощью постройте разложение F в композицию $G \cdot H$, где G – биективный на объектах и полный, H – унивалентный.
91. Докажите, что если $\mathcal{D}$ – категория с конечными произведениями, то и категория функторов $\mathcal{D}^{\mathcal{C}}$ – с конечными произведениями.
92. Докажите, что если $\mathcal{C}$ – категория с конечными произведениями и $\mathcal{D} \sim \mathcal{C}$, то и $\mathcal{D}$ – с конечными произведениями.
93. Пусть даны функторы $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$, $G : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ и функторные изоморфизмы $1_{\mathcal{D}} \cong G \cdot F$, $1_{\mathcal{C}} \cong F \cdot G$. Докажите, что F – эквивалентность.
94. Пусть $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ – эквивалентность категорий. Постройте функтор $G : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$, для которого существуют функторные изоморфизмы $1_{\mathcal{D}} \cong G \cdot F$, $1_{\mathcal{C}} \cong F \cdot G$.
95. Пусть $\mathcal{C}$ – локально малая категория с конечными произведениями. Докажите, что функтор Йонеды $y : \mathcal{C} \rightarrow \text{SET}^{\mathcal{C}^{\circ}}$ сохраняет конечные произведения.
96. а) Постройте забывающий функтор U из CAT в категорию PRECAT (малых) предкатегорий и предфункторов.
- б) Используя задачу 13, постройте левый сопряженный для U .
97. Докажите, что если для функторов $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$, $G : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ имеются правые сопряженные, то и $F \cdot G$ обладает правыми сопряженным.
98. Докажите, что для всякой эквивалентности $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ имеется правая сопряженная эквивалентность.

99. Постройте конечную сигнатуру Ω и бесконечную Ω -алгебру, не имеющую собственных подалгебр.
100. Унар — это алгебра с единственной одноместной операцией. Постройте конечный унар, содержащий более 1 элемента и не имеющий собственных подалгебр.
101. Докажите, что любой бесконечный унар имеет бесконечно много собственных подалгебр.
102. Существует ли конечная полугруппа, содержащая более 1 элемента и не имеющая собственных подалгебр?
103. Существует ли унар, который вкладывается в любой конечный унар?
104. Докажите, что в подалгебре $(\mathbb{N}, +)$ все элементы, кроме конечного числа, образуют арифметическую прогрессию.
105. Рангом подалгебры называется наименьшая мощность множества образующих.
- а) Постройте подалгебру $(\mathbb{N}, +)$ ранга 2.
- б) Постройте подалгебру $(\mathbb{N}, +)$ произвольного конечного ранга.
106. Докажите, что всякая подалгебра $(\mathbb{N}, +)$ конечно порождена.
107. Докажите, что гомоморфизмы Ω -алгебр — это в точности инъективные гомоморфизмы.
108. а) Докажите, что если G — группа, H — ее нормальная подгруппа, то отношение $xH = yH$ — конгруэнция в G .
- б) Докажите, что всякая конгруэнция в G имеет вид $xH = yH$ для некоторой нормальной подгруппы H .
- в) Докажите, что если G — группа, H — ее ненормальная подгруппа, то отношение $xH = yH$ — не конгруэнция в G .
109. Рассмотрим полугруппу $(\mathbb{N}, +)$.
- а) Верно ли, что $x + H = y + H$ — конгруэнция для любой подполугруппы H ?
- б) Существуют ли еще какие-нибудь конгруэнции?
110. Опишите все гомоморфные образы унара $(\mathbb{N}, S)$, где S — сдвиг на 1 вправо (теорема Дедекинда).
111. Опишите все конгруэнции в $(\mathbb{N}, S)$.

112. Постройте конечные алгебры A, B , которые не вкладываются в $A \times B$.
(Указание: можно рассмотреть унары).
113. Постройте коммутативные полугруппы A, B , которые не вкладываются в $A \times B$. (Указание: можно использовать рациональные числа).
114. а) Докажите, что всякая конечная полугруппа содержит хотя бы один идемпотент (т. е. элемент равный своему квадрату).
б) Выведите отсюда, что если A, B - полугруппы, и A конечна, то B вкладывается в $A \times B$.
115. Постройте конечные неизоморфные алгебры A, B , такие что $A \times A$ и $A \times B$ изоморфны. (Указание: можно рассмотреть унары).
116. Докажите, что произведение конечно порожденных моноидов — конечно порожденный моноид.
117. Верно ли, что произведение конечно порожденных Ω -алгебр — конечно порожденная алгебра?
118. Пусть $|X| \geq |Y|$. Постройте
а) вложение $T_\Omega(Y)$ в $T_\Omega(X)$.
б) гомоморфизм $T_\Omega(X)$ на $T_\Omega(Y)$.
119. Сколько автоморфизмов имеет алгебра $T_\Omega(X)$ при $|X| = n$?
120. Найдите полугруппу эндоморфизмов свободного циклического унара.
121. Рассмотрим конечные деревья конечных двоичных последовательностей: дерево — это множество последовательностей, содержащее вместе с каждой последовательностью все ее начальные отрезки (в том числе, пустой λ). На деревьях определим операцию «прививки»: $T + S := \{0x \mid x \in T\} \cup \{1x \mid x \in S\} \cup \{\lambda\}$.

Докажите, что полученная алгебра изоморфна $T_\Omega(X)$ для сигнатуры Ω с единственной бинарной операцией и $|X|=1$.
122. Найдите аналог предыдущей задачи для сигнатуры с двумя бинарными операциями и $|X|=2$.
123. (а) Рассмотрим конечную сигнатуру Ω , не содержащую констант. Докажите, что если X, Y конечны и $T_\Omega(X) \cong T_\Omega(Y)$, то $|X|=|Y|$.

(б) Докажите аналогичное утверждение для сигнатуры с константами и конечным непустым множеством функциональных символов.

124. Докажите, что всякая подалгебра алгебры $T_\Omega(X)$ изоморфна алгебре $T_\Omega(Y)$ для некоторого Y .
125. Пусть Ω - сигнатура с единственной бинарной операцией. Существует ли вложение $T_\Omega(X)$ в $T_\Omega(Y)$, если $|X|=2$, $|Y|=1$?
- $F_\Sigma(X)$ обозначает свободную алгебру многообразия $V(\Sigma)$, т.е. F_Σ — левый сопряженный к забывающему функтору $V(\Sigma) \rightsquigarrow \text{SET}$.
126. Докажите, что $(\mathbb{N}, +, 0)$ - свободный циклический моноид.
127. Докажите, что $(\mathbb{N}^k, +, 0)$ - свободный коммутативный моноид ранга k (если $k > 0$, натуральное).
128. Как построить свободный коммутативный моноид над произвольным множеством X ?
129. а) Как из свободного моноида получить свободную полугруппу?
 б) Как из свободного коммутативного моноида получить свободную коммутативную полугруппу?
130. Пусть $|X| \geq |Y|$. Постройте
 а) вложение $F_\Sigma(Y)$ в $F_\Sigma(X)$.
 б) гомоморфизм $F_\Sigma(X)$ на $F_\Sigma(Y)$.
131. Докажите, что любой свободный моноид конечного ранга вкладывается в свободный моноид ранга 2.
132. Докажите, что свободный коммутативный моноид ранга 3 не вкладывается в свободный коммутативный моноид ранга 2.
133. Докажите, что многообразие коммутативных идемпотентных моноидов локально финитно (т. е. порождается конечными алгебрами).
134. В категории Ω -алгебр рассмотрим морфизм $\alpha : A \longrightarrow B$. Пусть $\text{Hom}/\alpha(A, X)$ – множество всех морфизмов $\beta : A \longrightarrow X$, таких что $\sim_\alpha \subset \sim_\beta$.
 а) Доопределите $\text{Hom}/\alpha(A, X)$ до функтора $\text{Hom}/\alpha(A, -) : \Omega\text{-ALG} \rightsquigarrow \text{SET}$.
 б) Докажите, что любой функтор $\text{Hom}/\alpha(A, -)$ представим.
135. Пусть θ, ψ – конгруэнции на Ω -алгебре A , причем $\theta \subset \psi$.
 Постройте конгруэнцию ψ/θ в алгебре A/θ , такую что $(A/\theta)/(\psi/\theta) \cong A/\psi$.

136. (продолжение задачи 135) Докажите, что множество конгруэнций $\text{Con}(A/\theta)$ алгебры A/θ , упорядоченное по включению, изоморфно (упорядоченному) подмножеству $\text{Con}(A)$, которое состоит из конгруэнций, содержащих θ .
137. Постройте свободное коммутативное кольцо с единицей ранга 1.