

## Теоретические вопросы к коллоквиуму по алгебре.

### I. Линейная алгебра над полем $\mathbb{F}_2$ .

1. Доказать, что любая гиперплоскость в пространстве  $\mathbb{F}_2^n$  задается единственным линейным уравнением.
2. Доказать существование взаимного базиса.
3. Описать общее решение линейного однородного уравнения  $AX = 0$ , используя взаимный базис.
4. Доказать, что ранг матрицы по строкам равен рангу матрицы по столбцам.
5. Доказать, что линейное отображение  $A : \mathbb{F}_2^n \rightarrow \mathbb{F}_2^n$  сюръективно тогда и только тогда, когда оно инъективно.
6. Доказать основную теорему линейной алгебры (соотношение между размерностями ядра и образа).
7. Найти число  $k$ -мерных подпространств линейного пространства  $\mathbb{F}_2^n$ .
8. Найти порядок общей линейной группы  $GL_n(\mathbb{F}_2)$  обратимых линейных преобразований.
9. Найти число  $m$ -мерных подпространств, содержащих фиксированное  $k$ -мерное подпространство  $U_k$  в пространстве  $\mathbb{F}_2^n$ , с использованием конструкции фактор-пространства.

### II. ТЕОРИЯ ГРУПП.

1. Порядок элемента и его свойства.
2. Доказать, что любая подгруппа циклической группы циклическая.
3. Теорема Лагранжа и следствия из нее.
4. Доказать, что  $H$  нормальная подгруппа группы  $G$  тогда и только тогда, когда она является ядром некоторого гомоморфизма  $f : G \rightarrow G'$ .
5. Конструкция факторгруппы.
6. Первая теорема о гомоморфизме.
7. Дать описание всех подгрупп факторгруппы, используя первую теорему о гомоморфизме.
8. Вторая теорема о гомоморфизме.
9. Третья теорема о гомоморфизма.
10. Теорема Кэли (любая конечная группа изоморфна подгруппе группы перестановок).
11. Действие группы на множестве. Орбиты и стабилизаторы. Сопряженность стабилизаторов элементов из одной орбиты.
12. Формула орбит.
13. Классы сопряженных элементов. Формула классов.
14. Доказать нетривиальность центра конечной группы порядка  $p^n$ .

15. Найти все группы порядка  $p^2$  с точностью до изоморфизма.
16. Теорема Коши о существовании элемента порядка  $p$ .
17. Формула Бернсайда.
18. Каноническое разложение перестановки в произведение непересекающихся циклов. Как найти порядок перестановки?
19. Классы сопряженных перестановок.
20. Простота группы  $A_5$ .

### III. Кольца и поля.

1. Определение и простейшие свойства поля.
2. Идеалы кольца и определение факторкольца по идеалу.
3. Теорема о гомоморфизме колец:  $A/\text{Ker } \phi \cong \phi(A)$ .
4. Наибольший общий делитель в кольце главных идеалов.
5. Алгоритм Евклида в кольце многочленов над полем.
6. Доказать, что факторкольцо кольца главных идеалов по главному идеалу, порожденному неприводимым элементом, есть поле.
7. Построить поле из 4 и 9 элементов.
8. Простейшие подполя и характеристика поля.
9. Китайская теорема об остатках в кольцах главных идеалов.
10. Группа обратимых элементов кольца  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ . Функция Эйлера.
11. Теорема о характеристике конечной абелевой группы.
12. Доказать, что мультипликативная группа конечного поля циклическая.