Лекция 2. Метрики и метрические пространства. 7.12.2017

<u>Вкратце, что было про $\mathbb{R}$ и функции $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$:</u>

1) само $\mathbb{R}$; 2) расстояние между точками; 3) окрестности.
<u>Это дало возможность говорить о:</u>
4) расположении точки относительно множества (внутренние, предельные, граничные…)
5) типах множеств (открытые, замкнутые, компактные,…)
6) пределах последовательностей;
7) пределах функций (по Коши и по Гейне)
8) о непрерывных функциях, их свойствах, о связях с 5) (непрерывные функции на отрезке….)
Далее пошла дифференцируемость, потом будут интегралы…

Функции $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ одной переменной для средней школы вещь привычная, но в высшей математике чаще приходится иметь дело с $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R},\ f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^3,\ f:\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^n,\ldots$, с отображениями их подмножеств, других пространств, никак не связанных с $\mathbb{R}$ и т.п. Чтобы в каждом отдельном случае не повторять заново все перечисленные шаги 1) - 8) проводят всё построение в максимальной общности, которая в частных случаях автоматически даёт возможность пройти все шаги 1-8.

= = = = = = = =

Определение. Метрика ρ на множестве M – это отображение $\rho:\mathrm{M}\times\mathrm{M}\to[0;+\infty)$ ……
Метрическое пространство – это множество, вместе с метрикой на нём; пара (M,ρ).
Окрестности $U_\varepsilon(x)$.

Примеры (без проверок неравенства треугольника)**:**
- на $\mathbb{R}$ - $\min\{1,|x-y|\}$, $\varphi(|x-y|)$ для «хороших» (?насколько??) φ, дискретная метрика;
- на $\mathbb{R}^2$; на C[0;1] – равномерная, $\int_0^1|f(x)-g(x)|dx$, $\sum_n \frac{1}{2^n}\cdot\frac{|f(r_n)-g(r_n)|}{1+f(r_n)-g(r_n)}$.
- индуцированная метрика; если есть (M,ρ) и $\mathrm{L}\subset\mathrm{M}$, то $(\mathrm{L},\rho|_{L\times L})$ - тоже пример метр. пр-ва;

хотя про окрестности и говорят, что это открытые шары (круги), для «хитрых» метрик или для индуцированных метрик ничего геометрически «круглого» в окрестностях нет.

Определения см. выше 4 – 7.

Теорема 1. O_1 - пересечение конечного числа открытых множеств открыто; O_2 - объединение любого числа открытых множеств открыто; $З_1$, $З_2$ - замкнутые…; ОЗ - дополнение до открытого замкнуто, ЗО – дополнение до замкнутого открыто. (Доказаны: O_1 и ОЗ)

На (евклидовой) прямой открыты объединения непересекающихся интервалов и только они. На (евклидовой) плоскости ничего подобного нет: нет никакого полного описания семейства открытых множеств.

Теорема 2. Отображение $f:(\mathrm{M},\rho)\to(Y,d)$ непрерывно тогда и только тогда, когда прообраз любого открытого (в Y) множества открыт (в M).

Следствия. На плоскости открыты:
- полуплоскости ниже (выше) прямой;
- подграфики (надграфики) непрерывных $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ (в любой системе координат);
- множества решений систем строгих неравенств левые и правые части которых непрерывны;
- O_1 и O_2 применительно к перечисленному.

Пример (озёра Вады)**.** Три открытых *связных* подмножества плоскости с одной и той же границей – плоской линией.