Лекция 3. Компактность в метрических пространствах. 14.12.17

Теорема 1. Для любого подмножества X евклидова конечномерного пространства TFAE:
(1) X замкнуто и ограничено;
(2) Из всякой последовательности элементов множества X можно выделить подпоследовательность, сходящуюся к некоторому элементу из X; («*Б-В*»)
(3) Из любого открытого покрытия множества X можно выделить конечное подпокрытие («*Г- Б-Л*»).
(4) Всякая центрированная система замкнутых подмножеств множества X имеет непустое пересечение. (центрированная – любая конечная подсистема имеет непустое пересечение)
(5) Любая функция непрерывная на X ограничена на X. (5') достигает наим. и наиб. значений.

Теорема 2. Для любого подмножества X метрического пространства (M, ρ) TFAE: (2) – (5).

Из каждого (2)-(5) следует (1): X - замкнуто и ограничено. Обратное, вообще говоря, неверно.

*Теорема 3***.** Для любого подмножества X топологического пространства TFAE: (3) и (4). Из них следуют остальные. Обратное, вообще говоря, неверно.

Любое из (1) - (5) в соответствующей ситуации может быть выбрано в качестве **определения компактности.** Для евклидова конечномерного пространства компактность – это (1), остальное свойства (критерии). Исторически (начало XX века, М. Фреше), для метрических пространств компактность – это (2) . Для топологических, не метрических, пространств компактность – это (3). В оригинале (П.С.Александров и П. С. Урысон, 1925) – **бикомпактность**. В настоящее время в качестве определения компактности выбирают (3) (реже (4)), как самый общий вариант.

Доказательства.

Пример того, что из (1) не следует (2) – счётное дискретное пространство. □.
(1) $\Rightarrow$(3) в теореме 1 – сначала для квадрата, потом для его замкнутого подмножества; выбрано (3), а не (2), так как самый сложное доказательство (2) $\Rightarrow$(3) по существу обобщает док-во (1) $\Rightarrow$(3).□
(3) $\Rightarrow$(4) и (4) $\Rightarrow$(3) - упражнения на «де Моргана». □
(3) $\Rightarrow$(2), (2) $\Rightarrow$(1), (5) $\Rightarrow$(1) и (2) $\Rightarrow$(5) - калька с доказательств для прямой. □
(2) $\Rightarrow$(3). От противного, пусть есть открытое покрытие ω без конечного подпокрытия.
Шаг 1. Строим конечную 1-сеть. Если её нет, то неверно (2). Берем замкнутые 1-шары с центрами в ней. Выбираем тот 1-шар, для которого нет конечного подпокрытия.
Шаг 2. Раз 1-шар замкнут, то для него верно (2). Повторяем шаг 1 для него, но для 1/2-сети. Выбираем тот 1/2-шар, для которого нет конечного подпокрытия; он вложен в ранее выбранный 1-шар. **и т.д.**
Получаем последовательность стягивающихся шаров. К их центрам применяем (2), получаем подпоследовательность сходящуюся к точке x из X. (На самом деле к ней сходятся все центры и ровно она есть общая точка всех шаров.)
Шаг 3. Точка x лежит в $U_\varepsilon(x) \subset V \in \omega$. При $2/n < \varepsilon$ для 1/n-шара, который содержит x, получаем противоречие: он, с одной стороны, покрыт одним открытым множеством, а по построению для него нет конечного подпокрытия. □

= = = = = = =

Не успели на лекции (5) $\Rightarrow$(2). Док-во здесь, чтобы не возвращаться.

От противного, пусть $\{x_n\}$ - последовательность без сходящихся подпоследовательностей. Тогда у каждой её точки x_n есть $U_{\varepsilon_n}(x_n)$, в которой нет других точек последовательности. Тогда $V_n = U_{0,5\varepsilon_n}(x_n)$ попарно не пересекаются (!нер-во треугольника). Нужная (непрерывная, но не ограниченная сверху) функция $f : X \to \mathbb{R}$ равна нулю вне объединения $\cup V_n$, а на каждом V_n - «коническая»: на границе – нуль, в самой точке x_n равна n. Формулой:

$$f(x) = \left(\frac{\varepsilon_n}{2} - \rho(x, x_n) \right) \cdot \frac{2}{\varepsilon_n} \cdot n, \qquad x \in V_n \qquad \square$$