4 декабря 2017.

<u>Интродукция.</u> Topology – от Topos + logos $\approx$ «наука о взаиморасположении мест». Впервые использовал Й. Листинг (ученик К. Ф. Гаусса) около 1840 г. Для сравнения – топография, топонимика.

Как раздел науки, топология сформировалась к 1920-1930 гг. Она использует и соединяет в себе идеи и конструкции многих других разделов математики. Наверное, поэтому бывает много разных «топологий»: алгебраическая, гомотопическая, геометрическая, дифференциальная, кусочно-линейная, топология многообразий, бесконечномерная, топология плат,…

В этом миникурсе будут рассмотрены основные понятия *общей топологии*, в основном относящиеся к метрическим пространствам. Мы начнем с уже известных вещей. Материал первой лекции в заметной степени знаком по курсу математического анализа.

Лекция 1. Компактные числовые множества.

(Математический Анализ) Пусть X=[a;b]. Тогда:
(А) Любая функция непрерывная на X ограничена на X.
(Б) Любая функция непрерывная на X достигает наименьшего и наибольшего значений.
(В) Любая функция непрерывная на X принимает все промежуточные значения

Вопрос – на какое множество X можно заменить отрезок =[a;b]?

Теорема 1. Для любого числового множества X эквивалентны утверждения (TFAE):
(1) X замкнуто и ограничено; (2) см. выше (А).

Теорема 2. То же, что и Теорема 1, только (Б) вместо (А).
На самом деле, (А) и (Б) эквивалентны.

Теорема 3[1]. Для любого числового множества X TFAE:
(1) X выпукло; (2) см. выше (В).
Следствие. Отрезок – **единственное** числовое множество, для которого верны (А)-(В).

Теорема 4. Для любого числового множества X TFAE:
(1) X замкнуто и ограничено;
(2) Из всякой последовательности элементов множества X можно выделить подпоследовательность, сходящуюся к некоторому элементу из X; («*теорема Больцано-Вейерштрасса*»)
(3) Из всякого открытого покрытия[2] множества X можно выделить конечное подпокрытие («*лемма Гейне – Бореля - Лебега*»).

Числовое множество компактно, если для него верно одно из 4.1-4.3 (а значит, и всё).

Теорема 5. Любое компактное числовое множество получается из некоторого отрезка удалением не более чем счётного числа попарно непересекающихся интервалов. (см. курс МА)

Один из замечательных примеров числовых компактов - Канторово множество, или, как стало неприятно модным говорить в последнее время, «пыль Кантора». Например, оно помогает решить CH в классе замкнутых числовых множеств.

Теорема 6. Для всякого несчетного замкнутого числового множества F существует непрерывная инъекция из канторовского множества в F. В частности, F континуально.
Теорема 7. Для любого числового множества X TFAE: (1) X – отрезок; (2) Всякое непрерывное отображение X в себя имеет хотя бы одну неподвижную точку, кратко $X \in FPP$, *Fixed Point Property*.
(1) $\Rightarrow$(2) пересечение графика и диагонали квадрата, из теор. о пром. знач., (2) $\Rightarrow$(1) – задача.

---

[1] Шрифт *Теорема 3* указывает на то, что утверждение приведено без полного док-ва, для самостоятельной работы.
[2] открытое покрытие = покрытие открытыми множествами.