Семинар №2, ВвВТ. Числовые множества.

Задача 2.1. (Лемма Линделёфа). Несчетное числовое множество имеет хотя бы одну точку конденсации, принадлежащую этому множеству. (т. конденсации = пересечение любой окрестности точки с множеством – несчётно)
Задача 2.2. Множество всех точек конденсации замкнуто.
Задача 2.3. Множество всех точек конденсации совершенно (=нет изолированных точек).
Задача 2.4.(**). Для всякого непустого совершенного множества X есть инъекция из канторова множества в X.
Задача 2.5. Непустое совершенное множество континуально.
Задача 2.6. Несчётное замкнутое множество континуально.

Задача 2.7. TFAE : 1) X – выпукло; 2) теорема о промеж. значениях.
Задача 2.8. TFAE : 1) X – отрезок; 2) любое непр. отображение X в себя имеет неподвижную точку.

Задача 2.9. Была на МА задача. Если $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $\rho(\mathrm{f(x)},\mathrm{f(y)})\le \mathrm{q}\cdot\rho(\mathrm{x},\mathrm{y})$, $0\le q<1$, то f имеет единственную неподвижную точку («теорема С. Банаха о сжатии»)
а) Верно ли то же при замене $\rho(\mathrm{f(x)},\mathrm{f(y)})\le \mathrm{q}\cdot\rho(\mathrm{x},\mathrm{y})$, $0\le q<1$ на $\rho(\mathrm{f(x)},\mathrm{f(y)})<\rho(\mathrm{x},\mathrm{y})$, $x\ne y$? («сжимающее отображение»)
б) Доказать, что всякое сжимающее отображение числового компакта в себя имеет единственную неподвижную точку.

Задача 2.10. Для точек $x=0,\alpha_1\alpha_2...$ и $y=0,\beta_1\beta_2...$, α_i, $\beta_i=0\vee 2$ канторовского множества найдем первый по счету номер N=N(x,y) места, на котором троичные цифры **не** совпадают, и определим **бэровскую метрику** $b(x,y)=1/N$.
а) доказать, что это действительно метрика; б) сравнить обычную и бэровскую метрики; в) доказать, что сходимость $x_n\to x$ не зависит от выбора одной из этих метрик.