

Семинар №1, ВвВТ. Числовые множества.

Задача 1.1. Найти множества всех внутренних, всех внешних и всех граничных точек для следующих множеств. а) $(a;b)$; б) \mathbb{N} ; в) $\mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$; г) $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$; д) $\left\{ \frac{mn}{m+n} : m, n \in \mathbb{N} \right\}$

Задача 1.2. Рассмотрим утверждения: А) a - граничная точка X ; Б) a принадлежит в X ; В) в любой окрестности точки a есть точки из X ; Г) в любой окрестности точки a есть точки из X и есть точки не из X . Заполните таблицу: в клетку $(i; j)$ ставим +, если верно $i \rightarrow j$ и «-» в противном случае.

	А	Б	В	Г
А	+			
Б				
В				
Г				

Для «+» нужны доказательства, для «-» нужны контрпримеры.

Задача 1.3. Аналогично для: А) a - предельная точка X ; Б) a не принадлежит в X ; В) в некоторой окрестности точки содержится бесконечное подмножество множества X ; Г) a - граничная точка X .

Задача 1.4. Найти максимальную (или минимальную) длину составляющего интервала для множеств полученных удалением:

а) дробей со знаменателем 10 из интервала $(0,34; 0,93)$; б) дробей со знаменателем 100 из интервала $(e; \pi)$; в) чисел вида $\sqrt{7}/n$ из интервала $(0;1)$; г) членов последовательности $\frac{n-1}{n^2}$ из полуинтервала $(0;1)$; д) членов последовательности $\frac{n^2 - 7n}{n^2 - 5n + 10}$ из полуинтервала $[-1;1)$.

Задача 1.5. Пусть G_n есть окрестность точки $n = 1; 2; 3; \dots, 9$ радиуса $r(n)$ и $G = \bigcup_{n=1}^9 G_n$. При каких

q число составляющих интервалов множества G равно:

а) 9, 8, 1 если $r(n) = q^n$; б) 9, 2 $r(n) = nq$; в) найти максимальную длину составляющих интервалов.

Задача 1.6. Множество всех предельных точек множества X называют **производным множеством**; X' . По заданному X найти X' или по заданному X' привести пример X :

а) $X = [a;b)$; б) $\mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$; в) \mathbb{Q} ; г) $X' = \{-1; 1\}$; д) $X' = \{0, 1, 1/2, 1/3, 1/4, \dots, 1/n, \dots\}$;

Задача 1.7. Привести примеры множеств X , у которых : а) X' пусто, а X бесконечно; б) X'' пусто, а X' не пусто; в) X'' состоит ровно из двух точек; г) X'' счетно; д) X''' пусто, а X'' не пусто; е) X счетно, а X''' несчетно; ж) $X' = \mathbb{Q}$.

Задача 1.8. Доказать, что не существует непрерывной биекции:

а) из отрезка на всю числовую прямую; б) из отрезка на луч; в) из отрезка на полуинтервал; г) из отрезка на объединение двух непересекающихся отрезков; д) из интервала на множество \mathbb{T} всех трансцендентных чисел; е) из полуинтервала на интервал; ж) из прямой на отрезок.