

# Категории и универсальная алгебра

декабрь 2017

- 1 . Предкатегории и категории. Малые и локально малые категории. Примеры категорий. Двойственная категория.
- 2 . Дискретные категории. Предпорядки и ассоциированные с ними категории.
- 3 . Моноиды и категории с одним объектом.
- 4 . Единственность обратной стрелки. Изострелка. Изоморфные объекты. Начальные и финальные объекты.
- 5 . Предфункторы и функторы. Примеры функторов. Контравариантные функторы. Функтор включения. Подкатегория. Полная подкатегория.
- 6 . Композиция функторов. Категория CAT. Изоморфизм категорий.
- 7 . Характеризация малых категорий с одним объектом. Характеризация категорий, ассоциированных с предпорядками.
- 8 . Ном-функторы.
- 9 . Некоторые виды функторов: вложения, унивалентные, инъективные на объектах, полные. Вложение как изоморфизм на подкатеорию. Отражение изострелок полным унивалентным функтором.
- 1 0 . Конкретизируемость малых категорий. Теорема Кэли о представлении моноидов.
- 1 1 . Эквивалентность категорий. Скелетальные категории. Эквивалентность скелетальных категорий - изоморфизм. Скелет категории, его существование.
- 1 2 . Эквивалентность категории и ее скелета. Эквивалентность категорий как изоморфность скелетов.
- 1 3 . Диаграмма в категории. Категория конусов над диаграммой. Предел диаграммы.
- 1 4 . Произведение семейства объектов. Произведения в SET. Расслоенные произведения.
- 1 5 . Категория коконусов над диаграммой. Копредел диаграммы. Копроизведение (сумма) семейства объектов. Суммы в SET. Амальгамы.
- 1 6 . Уравнители. Всякий уравнитель — монострелка. Уравнители в SET.
- 1 7 . Полнота и конечная полнота. (Конечная) полнота категорий с уравнителями и (конечными) произведениями.
- 1 8 . Коуравнители. Коуравнители в SET. Кополнота. Признак кополноты.
- 1 9 . Сохранение пределов. Непрерывные функторы. Признак непрерывности: сохранение уравнителей и произведений.
- 2 0 . Непрерывность Ном-функтора. Контравариантный Ном-функтор переводит копределы в пределы.
- 2 1 . Морфизмы функторов (естественные преобразования). Категория функторов. Изоморфизм функторов.

- 2 2 . Эквивалентность категорий и квазиобратные функторы.
- 2 3 . Представимые функторы: определение и примеры.
- 2 4 . Лемма о бифункторе.
- 2 5 . Функтор Йонеды. Лемма Йонеды.
- 2 6 . Функтор Йонеды как вложение категории  $\mathcal{C}$  в категорию функторов  $\text{SET}^{\mathcal{C}}$ .
- 2 7 . Эквивалентные определения сопряженных функторов. Единственность сопряженного функтора.
- 2 8 . Непрерывность правого сопряженного функтора.
- 2 9 . Лемма о существовании начального объекта в локально малой полной категории.
- 3 0 . Комма-категории  $X \downarrow G$ . Существование левого сопряженного для  $G$  и начальные объекты комма-категорий.
- 3 1 . Теорема Фрейда о сопряженном функторе.
- 3 2 . Характеризация малых полных категорий. Равносильность непрерывности, представимости и существования левого сопряженного для функторов из малых полных категорий в  $\text{SET}$ .
- 3 3 . Категория  $\Omega$ -алгебр; ее полнота.
- 3 4 . Термы. Алгебра термов. Лемма об однозначном чтении.
- 3 5 . Абсолютная свобода алгебры термов. Оценка переменных в алгебре. Значение терма в алгебре при данной оценке. Образ значения при гомоморфизме.
- 3 6 . Функтор свободы  $T_{\Omega}$  как левый сопряженный к забывающему функтору.
- 3 7 . Подалгебры. Подалгебра, порожденная подмножеством. Эпиморфизм  $T_{\Omega}(X)$  на  $[X]$ .
- 3 8 . Образ и прообраз подалгебры при гомоморфизме.
- 3 9 . Конгруэнции в  $\Omega$ -алгебре. Теорема о гомоморфизме для  $\Omega$ -алгебр.
- 4 0 . Ядерная эквивалентность. Поднятие гомоморфизма в факторалгебру. Коуравнители в категории  $\Omega$ -алгебр.
- 4 1 . Тождества и многообразия алгебр. Сохранение тождеств для подалгебр и гомоморфных образов. Сохранение тождеств для произведений. Теорема Биркгофа о многообразиях (формулировка).
- 4 2 . Сохранение тождеств при действии подстановок. Задание многообразий тождествами от фиксированного счетного множества переменных.
- 4 3 . Эквациональные теории и многообразия. Теорема корректности для эквациональных теорий.
- 4 4 . Алгебра Линденбаума - Тарского для эквациональной теории. Теорема Биркгофа о полноте эквациональных теорий.
- 4 5 . Функтор свободы для многообразия как левый сопряженный к забывающему функтору.