Экзамен по геометрии 19 декабря 2017 года (Продолжительность экзамена 3 астрономических часа, количество задач 6)

В задачах 1 и 2 действие происходит в ортонормированном репере в евклидовом аффинном пространстве.

Вариант 1

1. Написать параметрическое уравнение ортогональной проекции прямой $x_1 = x_2 = x_3 = x_4$ на гиперплоскость $x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 1$.

2. Рассмотрим треугольную пирамиду с вершинами в точках $A(1,0,0)$, $B(0,1,0)$, $C(0,0,1)$, $D(1,1,1)$. Написать уравнение плоскости, которая проходит через ребро AB и делит объем пирамиды пополам.

3. В евклидовом пространстве дан трехгранный угол $OABC$. Дано, что $\angle BOC = \pi/6$, $\angle COA = \pi/8$, $\angle AOB = \pi/3$. Найти косинус угла между ребром OA и биссектрисой угла $\angle BOC$.

4. Найти неподвижные точки аффинного преобразования плоскости, которое три точки общего положения M_0, M_1, M_2 переводит соответственно в точки $\frac{M_1+4M_2}{5}$, $\frac{M_2+4M_0}{5}$, $\frac{M_0+4M_1}{5}$.

5. Оператор S записывается в ортонормированном базисе матрицей $\left(\begin{smallmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{smallmatrix}\right)$. Доказать, что для любого ненулевого вектора x выполняется неравенство $2 - \sqrt{2} \leq (Sx, x)/(x, x)$. Для каких векторов выполняется равенство?

6. В трехмерном векторном пространстве над полем рациональных чисел $\mathbb{Q}$ рассмотрим линейный оператор, характеристический многочлен которого равен $t^3 - 3t + 1$. Может ли у такого оператора существовать инвариантное подпространство, отличное от нулевого и всего пространства?

Экзамен по геометрии 19 декабря 2017 года (Продолжительность экзамена 3 астрономических часа, количество задач 6)

В задачах 1 и 2 действие происходит в ортонормированном репере в евклидовом аффинном пространстве.

Вариант 2

1. Написать параметрическое уравнение ортогональной проекции прямой $x_1 = x_2 = x_3 = x_4$ на гиперплоскость $x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 1$.

2. Рассмотрим треугольную пирамиду с вершинами в точках $A(1,0,0)$, $B(0,1,0)$, $C(0,0,1)$, $D(2,2,2)$. Написать уравнение плоскости, которая проходит через ребро AB и делит объем пирамиды пополам.

3. В евклидовом пространстве дан трехгранный угол $OABC$. Дано, что $\angle BOC = \pi/8$, $\angle COA = \pi/6$, $\angle AOB = \pi/3$. Найти косинус угла между ребром OA и биссектрисой угла $\angle BOC$.

4. Найти неподвижные точки аффинного преобразования плоскости, которое три точки общего положения M_0, M_1, M_2 переводит соответственно в точки $\frac{M_1+5M_2}{6}$, $\frac{M_2+5M_0}{6}$, $\frac{M_0+5M_1}{6}$.

5. Оператор S записывается в ортонормированном базисе матрицей $\left(\begin{smallmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{smallmatrix}\right)$. Доказать, что для любого ненулевого вектора x выполняется неравенство $2 - \sqrt{2} \leq (Sx, x)/(x, x)$. Для каких векторов выполняется равенство?

6. В трехмерном векторном пространстве над полем рациональных чисел $\mathbb{Q}$ рассмотрим линейный оператор, характеристический многочлен которого равен $t^3 - 3t + 5$. Может ли у такого оператора существовать инвариантное подпространство, отличное от нулевого и всего пространства?

Экзамен по геометрии 19 декабря 2017 года (Продолжительность экзамена 3 астрономических часа, количество задач 6)

В задачах 1 и 2 действие происходит в ортонормированном репере в евклидовом аффинном пространстве.

Вариант 3

1. Написать параметрическое уравнение ортогональной проекции прямой $x_1 = x_2 = x_3 = x_4$ на гиперплоскость $x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 1$.

2. Рассмотрим треугольную пирамиду с вершинами в точках $A(1,0,0)$, $B(0,1,0)$, $C(0,0,1)$, $D(3,3,3)$. Написать уравнение плоскости, которая проходит через ребро AB и делит объем пирамиды пополам.

3. В евклидовом пространстве дан трехгранный угол $OABC$. Дано, что $\angle BOC = \pi/3$, $\angle COA = \pi/6$, $\angle AOB = \pi/8$. Найти косинус угла между ребром OA и биссектрисой угла $\angle BOC$.

4. Найти неподвижные точки аффинного преобразования плоскости, которое три точки общего положения M_0, M_1, M_2 переводит соответственно в точки $\frac{M_1+6M_2}{7}$, $\frac{M_2+6M_0}{7}$, $\frac{M_0+6M_1}{7}$.

5. Оператор S записывается в ортонормированном базисе матрицей $\left(\begin{smallmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{smallmatrix}\right)$. Доказать, что для любого ненулевого вектора x выполняется неравенство $2 - \sqrt{2} \leq (Sx, x)/(x, x)$. Для каких векторов выполняется равенство?

6. В трехмерном векторном пространстве над полем рациональных чисел $\mathbb{Q}$ рассмотрим линейный оператор, характеристический многочлен которого равен $t^3 - 3t + 7$. Может ли у такого оператора существовать инвариантное подпространство, отличное от нулевого и всего пространства?

Экзамен по геометрии 19 декабря 2017 года (Продолжительность экзамена 3 астрономических часа, количество задач 6)

В задачах 1 и 2 действие происходит в ортонормированном репере в евклидовом аффинном пространстве.

Вариант 4

1. Написать параметрическое уравнение ортогональной проекции прямой $x_1 = x_2 = x_3 = x_4$ на гиперплоскость $x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 2$.

2. Рассмотрим треугольную пирамиду с вершинами в точках $A(1,0,0)$, $B(0,1,0)$, $C(0,0,1)$, $D(4,4,4)$. Написать уравнение плоскости, которая проходит через ребро AB и делит объем пирамиды пополам.

3. В евклидовом пространстве дан трехгранный угол $OABC$. Дано, что $\angle BOC = \pi/6$, $\angle COA = \pi/3$, $\angle AOB = \pi/2$. Найти косинус угла между ребром OA и биссектрисой угла $\angle BOC$.

4. Найти неподвижные точки аффинного преобразования плоскости, которое три точки общего положения M_0, M_1, M_2 переводит соответственно в точки $\frac{M_1+7M_2}{8}$, $\frac{M_2+7M_0}{8}$, $\frac{M_0+7M_1}{8}$.

5. Оператор S записывается в ортонормированном базисе матрицей $\left(\begin{smallmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{smallmatrix}\right)$. Доказать, что для любого ненулевого вектора x выполняется неравенство $2 - \sqrt{2} \leq (Sx, x)/(x, x)$. Для каких векторов выполняется равенство?

6. В трехмерном векторном пространстве над полем рациональных чисел $\mathbb{Q}$ рассмотрим линейный оператор, характеристический многочлен которого равен $t^3 - 3t + 11$. Может ли у такого оператора существовать инвариантное подпространство, отличное от нулевого и всего пространства?