А. К. Погребков

Функциональный анализ

Лекции 7–14

Высшая школа экономики
1-й семестр 2017/2018 гг.

Содержание

7. Лекция 7

Здесь мы доказываем один из основных результатов функционального анализа – теорему Хана–Банаха. Доказательство нам придется делать в два шага: сначала мы докажем эту теорему для вещественного векторного пространства, а потом обобщим ее на на комплексное.

7.1. **Теорема Хана–Банаха, вещественный случай.**

Теорема 7.1. *Пусть X – вещественное векторное пространство, p – вещественная функция, определенная на X и удовлетворяющая условию $p(\alpha x+(1-\alpha)y) \le \alpha p(x)+(1-\alpha)p(y)$ для всех $x, y \in X$, $\alpha \in [0,1]$. Предположим, что λ – линейный функционал, определенный на подпространстве $Y \subset X$ и удовлетворяющий неравенству $\lambda(x) \le p(x)$ для всех $x \in Y$. Тогда существует линейный функционал Λ, определенный на X, такой, что $\Lambda(x) \le p(x)$ для всех $x \in X$ и $\Lambda(x) = \lambda(x)$ для всех $x \in Y$.*

Доказательство. Идея доказательства состоит в следующем. Сначала покажем, что если $z \in X$, но $z \notin Y$, то λ можно продолжить на пространство, натянутое на z и Y. А потом воспользуемся рассуждением по лемме Цорна и покажем, что подобный процесс позволяет продолжить λ на все пространство X.

Пусть $\widetilde{Y}$ – подпространство, натянутое на Y и z. Пусть $\widetilde{\lambda}$ – продолжение λ на $\widetilde{Y}$, оно будет описано, коль скоро мы определим $\widetilde{\lambda}(z)$, т.к.

$$\widetilde{\lambda}(uz + y) = u\widetilde{\lambda}(z) + \lambda(y), \quad u \in \mathbb{R}.$$

Пусть $y_1, y_2 \in Y$ и пусть $\alpha, \beta > 0$. Тогда

$$\begin{aligned}\beta\lambda(y_1) + \alpha\lambda(y_2) = \lambda(\beta y_1 + \alpha y_2) = (\alpha+\beta)\lambda\Big(\frac{\beta}{\alpha+\beta}y_1 + \frac{\alpha}{\alpha+\beta}y_2\Big) \le \\ \le (\alpha+\beta)p\Big(\frac{\beta}{\alpha+\beta}(y_1-\alpha z) + \frac{\alpha}{\alpha+\beta}(y_2+\beta z)\Big) \le \\ \le \beta p(y_1-\alpha z) + \alpha p(y_2+\beta z).\end{aligned}$$

Значит, для всех $\alpha, \beta > 0$ и $y_1, y_2 \in Y$

$$\frac{1}{\alpha}\big[-p(y_1-\alpha z) + \lambda(y_1)\big] \le \frac{1}{\beta}\big[p(y_2+\beta z) - \lambda(y_2)\big],$$

а потому существует такое вещественное a, что

$$\sup_{\substack{y\in Y\\ \alpha>0}} \frac{1}{\alpha}\big[-p(y-\alpha z) + \lambda(y)\big] \le a \le \inf_{\substack{y\in Y\\ \alpha>0}} \frac{1}{\alpha}\big[p(y+\alpha z) - \lambda(y)\big].$$

Положим тогда $\widetilde{\lambda}(z) = a$. Легко видеть, что полученное продолжение удовлетворяет неравенству $\widetilde{\lambda}(x) \leq p(x)$ при всех $x \in \widetilde{Y}$. Итак, мы показали, что λ за один шаг может быть продолжено на одно измерение.

Для завершения доказательства воспользуемся леммой Цорна. Пусть $\mathcal{E}$ – набор расширений e функционала λ, удовлетворяющих условию $e(x) \leq p(x)$ на тех подпространствах, где они определены. Введем в $\mathcal{E}$ частичное упорядочение, положив $e_1 \prec e_2$, если e_2 определено на большем множестве, чем e_1 и $e_2(x) = e_1(x)$ там, где они оба определены. Пусть $\{e_\alpha\}_{\alpha \in A}$ – линейно упорядоченное подмножество в $\mathcal{E}$; пусть X_α – то подпространство, на котором определено e_α. Определим e на $\cup_{\alpha \in A} X_\alpha$, положив $e(x) = e_\alpha(x)$, если $x \in X_\alpha$. Очевидно, что $e_\alpha \prec e$, так что всякое линейно упорядоченное подмножество в $\mathcal{E}$ имеет верхнюю грань. В силу леммы Цорна $\mathcal{E}$ содержит максимальный элемент Λ, определенный на некотором множестве X' и удовлетворяющий условию $\Lambda(x) \leq p(x)$ при $x \in X'$. Но X' должно совпадать со всем X, так как в противном случае мы могли бы продолжить Λ на более широкое пространство, добавляя, как и выше, еще одно измерение. Поскольку это противоречит максимальности Λ, должно быть $X = X'$. Значит расширение Λ определено всюду.

7.2. **Теорема Хана–Банаха, комплексный случай.**

Теорема 7.2. *Пусть X – комплексное векторное пространство, p – вещественная положительная функция, определенная на X и удовлетворяющая условию $p(\alpha x + \beta y) \leq |\alpha| p(x) + |\beta| p(y)$ при любых $x, y \in X$ и любых $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ таких, что $|\alpha| + |\beta| = 1$. Пусть λ – комплексный линейный функционал, определенный на подпространстве $Y \subset X$ и удовлетворяющий условию $|\lambda(x)| \leq p(x)$ при любом $x \in Y$. Тогда существует комплексно линейный функционал Λ, определенный на X, удовлетворяющий условию $|\Lambda(x)| \leq p(x)$ при любом $x \in X$ и такой, что $\Lambda(x) = \lambda(x)$ при $x \in Y$.*

Доказательство. Положим $\ell(x) = \mathrm{Re}\{\lambda(x)\}$, так что ℓ – вещественно линейный функционал на Y и, поскольку

$$\ell(ix) = \mathrm{Re}\{\lambda(ix)\} = \mathrm{Re}\{i\lambda(x)\} = -\operatorname{Im} \lambda(x),$$

то $\lambda(x) = \ell(x) - i\ell(ix)$. Т.к. ℓ – вещественно линеен и $p(\alpha x + (1 - \alpha) y) \leq \alpha p(x) + (1 - \alpha) p(y)$ при любом $\alpha \in [0, 1]$, то существует вещественно линейное расширение L на все X, удовлетворяющее условию $L(x) \leq p(x)$. Положим $\Lambda(x) = L(x) - iL(ix)$. По построению это – вещественно линейный функционал, являющийся расширением функционала λ. Но поскольку $\Lambda(ix) = L(ix) - iL(-x) = i\Lambda(x)$, то Λ – комплексно линеен. Осталось доказать, что $|\Lambda(x)| \leq p(x)$. Заметим, что $p(\alpha x) \leq p(x)$ для любого α такого, что $|\alpha| = 1$. Обозначим $\theta = \mathrm{Arg}(\Lambda(x))$. Тогда в силу равенства $\mathrm{Re}\,\Lambda = L$, имеем:

$$|\Lambda(x)| = e^{-i\theta}\Lambda(x) = \Lambda(e^{-i\theta}x) = \mathrm{Re}\,\Lambda(e^{-i\theta}x) =$$
$$= L(e^{-i\theta}x) \leq p(e^{-i\theta}x) \leq p(x),$$

что и требовалось доказать.

Литература к лекции 7: М.Рид, Б.Саймон “Методы современной математической физики”, том 1, “Функциональный анализ”.

8. Лекция 8

8.1. **Пространства $\mathscr{S}$ и $\mathscr{S}'$.** Банаховы пространства обладают многими свойствами эвклидовых: это векторные пространства, норма в них опеределяет понятие расстояния, а всякая последовательность Коши имеет предел. Хороший пример использования этих пространств дает теория обобщенных функций, которую мы кратко рассмотрим здесь. В описании обобщенных функций банаховы пространства возникают следующим образом. Введем пространство $\mathscr{S} = \mathscr{S}(\mathbb{R})$ (для простоты изложения мы рассматриваем функции одной переменной) бесконечно дифференцируемых функций, убывающих на бесконечности вместе со всеми своими производными быстрее любой обратной степени x (говорят также: быстрее любого полинома). Введем в $\mathscr{S}$ счетное число норм, определенных как

$$\|\phi\|^{(p)} = \sup_{\substack{x\in\mathbb{R}\\ \alpha\le p}} (1+|x|^2)^{p/2}|\partial_x^\alpha \phi(x)|, \quad p = 0, 1, \dots. \tag{8.1}$$

Очевидно, что

$$\|\phi\|^{(0)} \le \|\phi\|^{(1)} \le \|\phi\|^{(2)} \le \dots. \tag{8.2}$$

Зададим сходимость в $\mathscr{S}$ следующим образом:

Определение 8.1. *Последовательность функций ϕ_1, ϕ_2, … из $\mathscr{S}$ сходится к нулю, $\phi_k \to 0$ в $\mathscr{S}$ при $k\to\infty$, если для всех $p = 0, 1, \dots$ последовательности $\|\phi_k\|^{(p)} \to 0$ при $k \to \infty$.*

Иными словами: $\phi_k \to 0$ в $\mathscr{S}$ при $k \to \infty$, если $x^p\partial_x^\alpha\phi(x)$ сходится к нулю при всех $p \ge \alpha = 0, 1, \dots$ равномерно по $x \in \mathbb{R}$.

Пусть $\mathscr{S}_p$ означает пополнение $\mathscr{S}$ по p-ой норме. Каждое $\mathscr{S}_p$ – банахово пространство и справедливы вложения:

$$\mathscr{S}_0 \supset \mathscr{S}_1 \supset \mathscr{S}_2 \supset \dots,$$

причем каждое вложение $\mathscr{S}_{p+1} \subset \mathscr{S}_p$ непрерывно в силу (8.2). Можно доказать, что это вложение вполне непрерывно (компактно), т.е. из всякого бесконечного ограниченного множества в $\mathscr{S}_{p+1}$ можно выбрать последовательность, сходящуюся в $\mathscr{S}_p$.

Теорема 8.1. *$\mathscr{S}$ – полное пространство и $\mathscr{S} = \bigcap_{p\ge0}\mathscr{S}_p$.*

Доказательство. Пусть f_k –последовательность Коши по каждой из норм $\|\cdot\|^{(p)}$, что означает что $x^p\partial_x^\alpha f_k(x) \to g_{p,\alpha}(x)$ при $k \to \infty$ и всех $p, \alpha = 0, 1, \dots$ равномерно по $x \in \mathbb{R}$. Обозначим $g =$

$g_{0,0}$ и докажем, что $g(x)$ непрерывно дифференцируема и $g' = g_{0,1}$. Действительно,

$$f_k(x) = f_k(0) + \int\limits_0^x dt\, f_k'(t),$$

и ввиду равномерности стремления $f_k' \to g_{0,1}$ имеем

$$g(x) = g(0) + \int\limits_0^x dt\, g_{0,1}(t),$$

$g \in C^1$ $g = g_{0,1}$. Повторяя этот процесс, получаем, что $g_{p,\alpha}(x) = x^p \partial_x^\alpha g(x)$ и в топологии пространства $\mathscr{S}$ предел $\lim_{k\to\infty} f_k = g$. Теорема доказана.

Определение 8.2. *Топологически сопряженное пространство к $\mathscr{S}(\mathbb{R})$, обозначаемое $\mathscr{S}'(\mathbb{R})$, называется пространством обобщенных функций (распределений) умеренного роста.*

Для того, чтобы линейный функционал T на $\mathscr{S}$ был непрерывен, должна существовать норма $\|\cdot\|^{(p)}$ такая, что $|T(\varphi)| \le C\|\varphi\|^{(p)}$ для всех $\varphi \in \mathscr{S}$. Даействительно, если имеется последовательность Коши $\{\varphi_k\}$ в $\mathscr{S}$, то она является последовательностью Коши для любой нормы $\|\cdot\|^{(p)}$. А тогда и $T(\varphi_k)$ – последовательность Коши.

8.2. **Примеры обобщенных функций. Пример 1. Регулярные обобщенные функции.** Пусть $g \in \mathscr{S}$. Определим функционал $g(\cdot)$ на $\mathscr{S}$ как

$$g(\varphi) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} dx\, g(x)\varphi(x). \tag{8.3}$$

Он, очевидно, линеен и непрерывен, поскольку

$$|g(\varphi)| \le \|g\|_{L^1(\mathbb{R})}\|\varphi\|^{(0)}$$

. Таким образом мы получаем, что $\mathscr{S} \subset \mathscr{S}'$. Аналогично можно показать, что $L^q \subset \mathscr{S}'$. Обобщенные функции, заданные интегралом (8.3), называются регулярными. Часто по аналогии со скалярным произведением используется обозначение

$$(g, \varphi) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} dx\, g(x)\varphi(x), \tag{8.4}$$

но в отличии от скалярного произведения здесь нет комплексного сопряжения. Один из наиболее известных примеров регулярной обобщенной функции – функция Хевисайда:

$$(\theta,\varphi)=\int_{0}^{+\infty}dx\,\varphi(x)\equiv\int_{-\infty}^{+\infty}dx\,\theta(x)\varphi(x), \tag{8.5}$$

где

$$\theta(x)=\begin{cases}1, & x>0\\ 0, & x<0\end{cases}.$$

Пример 2. Главное значение интеграла в смысле Коши. Определим

$$\left(\frac{1}{x},\varphi\right)=\lim_{\varepsilon\to+0}\int_{|x|>\varepsilon}dx\frac{\varphi(x)}{x}.$$

Этот интеграл конечен, поскольку

$$\left(\frac{1}{x},\varphi\right)=\int dx\frac{\varphi(x)-\varphi(-x)}{x}.$$

Более того,

$$\left|\frac{\varphi(x)-\varphi(-x)}{x}\right|\le\frac{1}{x}\int_{-x}^{x}dt\,|\varphi'(t)|\le 2\|\varphi\|^{(1)}.$$

Так что

$$\left|\left(\frac{1}{x},\varphi\right)\right|\le 2\int_{0}^{1}dx\|\varphi\|^{(1)}+2\left|\int_{1}^{\infty}\frac{dx}{x^2}(x\varphi(x))\right|\le 4\|\varphi\|^{(1)}.$$

Пример 3. Дельта-функция. Прежде всего необходимо помнить, что дельта-функция (Дирака) есть не функция, а функционал, заданный формулой

$$(\delta,\varphi)=\varphi(0), \tag{8.6}$$

где $\varphi(x)\in\mathscr{S}$. Это равенство обычно записывают в виде

$$\int dx\,\delta(x)\varphi(x)=\varphi(0), \tag{8.7}$$

но легко видеть, что функции $\delta(x)$ такой, что выполнено (8.7) не существует. Поэтому (8.7) есть просто формальная запись (8.6). Линейность и непрерывность этого функционала легко следуют из (8.6).

Литература к лекции 8:

М.Рид, Б.Саймон “Методы современной математической физики”, том 1, “Функциональный анализ”;

В.С.Владимиров “Обобщенные функции в математической физике”;

И.М.Гельфанд, Г.Е.Шилов “Обобщенные функции и действия над ними”, гл. I;

В.С.Владимиров , В.В.Жаринов “Уравнения математической физики”.

9. Лекция 9

9.1. **Операции над обобщенными функциями. Замена переменных.** Пусть даны локально интегрируемая функция $f(x)$ и бесконечно дифференцируемая строго монотонно возрастающая функция $a(x)$, возрастающая на бесконечности. Тогда для любой основной функции $\phi(x)$

$$\int dx\, f(a(x))\phi(x) = \int dy\, (a^{-1}(y))' f(y)\phi(a^{-1}(y))$$

где $y = a(x)$ и a^{-1} означает обратную функцию. Поскольку произведение $(a^{-1}(y))'\phi(a^{-1}(y))$ также является основной функцией (в пространстве $\mathscr{S}$ следует потребовать роста $a(x)$ на бесконечности). Поэтому каждой обобщенной функции f мы сопоставляем обобщенную функцию $f(a)$ по правилу:

$$(f(a), \phi) = (f, (a^{-1})'\phi(a^{-1}))$$

В частности

$$(\delta(a), \phi) = (a^{-1}(y))'\phi(a^{-1}(y))|_{y=0}.$$

Пусть x_0 – единственный ноль функции $a(x)$, $a(x_0) = 0$. Тогда $\delta(a(x)) = \frac{\delta(x-x_0)}{a'(x_0)}$. В некоторых случаях можно отказаться от требования монотонности. Например, если все нули функции $a(x)$ простые, то можно показать, что

$$\delta(a(x)) = \sum_j \frac{\delta(x - x_j)}{|a'(x_j)|},$$

где суммирование ведется по всем нулям x_j функции $a(x)$.

Мультипликаторы и свертка обобщенных функций с основными. Общее определение произведения обобщенных функций невозможно. Однако, если регулярная функция $a(x)$ такова, что для любой основной функции $\phi(x)$ произведение $a(x)\phi(x)$ также является основной функцией, причем для любой сходящейся последовательности $\phi_n(x)$ последовательность $a(x)\phi_n(x)$ также является сходящейся, то умножение обобщенной функции на такую регулярную определяется формулой

$$(af, \phi) = (f, a\phi), \tag{9.1}$$

что дает линейный и непрерывный (в силу сказанного выше) функционал на пространстве основных функций, а функция $a(x)$ называется **мультипликатором**. Например, мультипликаторами являются все бесконечно дифференцируемые функции $a(x)$, растущие на бесконечности не быстрее полинома. В частности из (9.1) следует, что

$$x\delta(x) = 0. \tag{9.2}$$

Если $\phi(x)$ – основная функция в одном из трех пространств, то для любого конечного y функция $\phi(x-y)$ также является основной в том же пространстве. Поэтому свертку $(\phi * f)(x)$ основной функции с обобщенной можно определить как

$$(\phi * f)(x) = (f, \phi(\cdot - x)), \tag{9.3}$$

что, очевидно, дает обычную бесконечно дифференцируемую функцию.

9.2. **Дифференцирование обобщенных функций.** Основным достоинством обобщенных функций, определяющим их приложимость к исследованию дифференциальных уравнений является их бесконечная дифференцируемость в смысле следующего определения.

Определение 9.1. *Для заданной обобщенной функции f ее производная по x определяется как:*

$$(f', \phi) = -(f, \phi'). \tag{9.4}$$

Легко видеть, что данное определение дает обобщенную функцию умеренного роста.

Пример 1. Для производной функции Хевисайда имеем:

$$(\theta', \phi) = -(\theta, \phi') = -\int_x^{+\infty} dx \phi'(x) = \phi(0),$$

так что

$$\theta' = \delta, \tag{9.5}$$

Пример 2. Показать, что в смысле главных значений:

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2},$$

где обобщенная функция $\dfrac{1}{x^2}$ в смысле главного значения определяется как

$$\left(\frac{1}{x^2}, \phi\right) = \text{p.v.} \int dx \frac{\phi(x) - \phi(0)}{x^2} \equiv \int_0^{\infty} dx \frac{\phi(x) + \phi(-x) - 2\phi(0)}{x^2}$$

9.3. **Первообразные обобщенных функций.** Пусть $\eta(x)$ – первообразная основной функции $\phi(x)$ из $\mathscr{S}$. Функция $\eta(x)$ принадлежит $\mathscr{S}$ и однозначно определяется тогда и только тогда, когда

$$\int dx\phi(x) = 0. \tag{9.6}$$

Пусть существует $\eta(x) \in \mathscr{S}$, заданная посредством $\eta'(x) = \phi(x)$. Тогда

$$\int dx\,\phi(x) = \int dx\,\eta'(x) = 0,$$

т.е. (9.6) выполнено. Обратно, положим, что (9.6) выполнено и определим $\eta(x) = \int_{-\infty}^{x} dy\,\phi(y)$. Очевидно, что при больших x эта функция константа (ограничена). Понятно, что в силу условия (9.6) $\eta(x)$ стремится к нулю на обоих бесконечностях. Единственность такой функции и ее бесконечная дифферецируемость очевидны. Оценки $|x^m\eta^{(n)}(x)|$ выполнены при всех $n \geq 1$, а при $n = 0$ они следуют тривиально.

Теорема 9.1. *Любая обобщенная функция f из $\mathscr{S}'$ обладает первообразной g, $g' = f$, принадлежащей пространству из $\mathscr{S}'$, причем такая первообразная единственна с точностью до произвольной константы.*

Доказательство. Пусть $\psi(x)$ и $\omega(x)$ – произвольные основные функции из $\mathscr{S}$, причем $\int dx\,\omega(x) = 1$. По сказанному выше тогда найдется такая основная функция $\phi(x)$, что

$$\psi(x) = \varphi'(x) + \omega(x)\int dy\,\psi(y),$$

где $\phi'(x)$ определено данным равенством и $\int dx\,\varphi'(x) = 1$. Положим теперь

$$(g,\psi) \equiv (g,\varphi') + (g,\omega)(1,\psi) = -(f,\varphi) + (g,\omega)(1,\psi), \tag{9.7}$$

что, очевидно, задает линейный непрерывный функционал из $\mathscr{S}'$.■

9.4. **Сходимость обобщенных функций.** Мы говорим, что последовательность обобщенных функций $f_1, f_2, \ldots$ сходится к обобщенной функции f, если для любой основной функции ϕ

$$\lim_{n\to\infty}(f_n,\phi) = (f,\phi).$$

Тогда дифференцирование – непрерывная операция. Действительно, если последовательность обобщенных функций $f_n \to f$, $n \to \infty$, то

$$\left(\frac{\partial f_n}{\partial x},\phi\right) = -\left(f_n,\frac{\partial \phi}{\partial x}\right) \to -\left(f,\frac{\partial \phi}{\partial x}\right) = \left(\frac{\partial f}{\partial x},\phi\right).$$

Пример: $f_n(x) = \frac{e^{inx}}{n} \to 0$ в смысле пространства $\mathscr{S}'$ при $n \to \infty$. Но тогда и $e^{inx} \to 0$ в смысле $\mathscr{S}'$ при $n \to \infty$.

Для дальнейшего нам потребуется следующая лемма.

Лемма 9.1. *Пусть дана последовательность функционалов* $\{f_k\}$ *из слабо ограниченного множества* $M' \subset \mathscr{S}'$, *т.е.* $|(f,\phi)| < C_\phi$ *для всех* $f \in M'$ *и* $\phi \in \mathscr{S}$. *Пусть* $\{\phi_k\}$ *– последовательность основных функций, сходящаяся к нулю:* $\phi_k \xrightarrow{\mathscr{S}} 0$, *при* $k \to \infty$. *Тогда* $(f_k, \phi_k) \to 0$ *при* $k \to \infty$.

Доказательство леммы. Предположим, что данное утверждение неверно. Тогда из данных последовательностей можно выделить такие подпоследователности, что $|(f_k, \phi_k)| \geq c > 0$. Сходимость последовательности ϕ_k в $\mathscr{S}$ к нулю эквивалентно можно сформулировать как сходимость к нулю по метрике $\rho(\phi_k) \to 0$, где

$$\rho(\phi) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{2^{-p}\|\phi\|^{(p)}}{1 + \|\phi\|^{(p)}}. \tag{9.8}$$

Переходя к подпоследовательности, всегда можем считать, что выполняется: $\rho(\phi_k) \leq \dfrac{1}{4^k}$. Введем $\psi_k = 2^k \phi_k$, так что при $k \to \infty$: $\rho(\psi_k) \to 0$, т.е. $\psi_k \xrightarrow{\mathscr{S}} 0$, и

$$|(f_k, \psi_k)| \geq 2^k c \to \infty, \quad k \to \infty. \tag{9.9}$$

Выделим теперь подпоследовательности f_{k_n} и ψ_{k_n} следующим построением по индукции. Выберем f_{k_1} и ψ_{k_1} так, чтобы $|(f_{k_1}, \psi_{k_1})| \geq 2$. Пусть f_{k_j} и ψ_{k_j} при $j = 1, 2, \ldots, n-1$ уже построены. Построим f_{k_n} и ψ_{k_n}. В силу $\psi_k \xrightarrow{\mathscr{S}} 0$, имеем $(f_{k_j}, \psi_k) \to 0$ при $k \to \infty$ и $j = 1, 2, \ldots, n-1$. Поэтому найдется такой номер N, что при всех $k \geq N$

$$(f_{k_j}, \psi_k) \leq \frac{1}{2^{n-j}}, \quad j = 1, \ldots, n-1. \tag{9.10}$$

С другой стороны, по условию $|(f_k, \psi_{k_j})| \leq c_{k_j}$ при $j = 1, 2, \ldots, n-1$. Далее, по (9.9) выберем такой номер $k_n \geq N$, что

$$|(f_{k_n}, \psi_{k_n})| \geq \sum_{1 \leq j \leq n-1} c_{k_j} + n + 1. \tag{9.11}$$

Итак, мы ввели f_{k_n} и ψ_{k_n} такие, что по (9.9) и (9.10)

$$(f_{k_j}, \psi_{k_n}) \le \frac{1}{2^{n-j}}, \quad j = 1, \dots, n-1. \tag{9.12}$$

$$|(f_{k_n}, \psi_{k_n})| \ge \sum_{1 \le j \le n-1} |(f_{k_n}, \psi_{k_j})| + n + 1. \tag{9.13}$$

Положим $\psi = \sum_{j=1}^{\infty} \psi_{k_j}$. Поскольку $\rho(\psi_k) \le 2^{-k}$, ряд сходится в $\mathscr{S}$ и $\psi \in \mathscr{S}$, а тогда

$$(f_{k_n}, \psi) = (f_{k_n}, \psi_{k_n}) + \sum_{j \ne n} (f_{k_n}, \psi_{k_j}).$$

Тогда в силу (9.12) и (9.13) имеем оценку

$$|(f_{k_n}, \psi)| \ge |(f_{k_n}, \psi_{k_n})| - \sum_{1 \le j \le n-1} |(f_{k_n}, \psi_{k_j})| - \sum_{j \ge n+1}^{\infty} |(f_{k_n}, \psi_{k_j})| \ge$$

$$n + 1 - \sum_{j \ge n+1}^{\infty} \frac{1}{2^{j-n}} = n,$$

т.е. $(f_{k_n}, \psi) \to \infty$ при $n \to \infty$, что противоречит условию леммы. ■

Литература к лекции 9: М.Рид, Б.Саймон “Методы современной математической физики”, том 1, “Функциональный анализ”; В.С.Владимиров “Обобщенные функции в математической физике”.

10. Лекция 10.

10.1. **Теорема Лорана Шварца.**

Теорема 10.1. *Пусть M' – слабо ограниченное множество функционалов из $\mathscr{S}'$, т.е. $|(f,\phi)| < C_\phi$ для всех $f \in M'$ и $\phi \in \mathscr{S}$. Тогда существуют такие числа $K \geq 0$ и $m \geq 0$, что*

$$|(f,\phi)| \leq K\|\phi\|_m, \quad f \in M', \quad \phi \in \mathscr{S}. \tag{10.1}$$

Доказательство. Если неравенство (10.1) несправедливо, то найдутся последовательности $\{f_k\}$ – функционалов из M' и ϕ_k – функций из $\mathscr{S}$ такие, что

$$|(f_k,\phi_k)| \geq k\|\phi_k\|^{(k)}, \quad k = 1, 2, \ldots.$$

Последовательность функций

$$\psi_k(x) = \frac{\phi_k(x)}{\sqrt{k}\|\phi_k\|^{(k)}}, \quad k = 1, 2, \ldots$$

стремится к 0 в $\mathscr{S}$, ибо при $k \geq p$:

$$\|\psi_k\|^{(p)} = \frac{\|\phi_k\|^{(p)}}{\sqrt{k}\|\phi_k\|^{(k)}} \leq \frac{1}{\sqrt{k}}.$$

Последовательность функционалов $\{f_k\}$ ограничена на каждой основной функции ϕ из $\mathscr{S}$. Поэтому по доказанной выше лемме имеем $(f_k,\psi_k) \to 0$ при $k \to \infty$. С другой стороны, неравенство (10.1) дает

$$|(f_k,\psi_k)| = \frac{|(f_k,\phi_k)|}{\sqrt{k}\|\phi_k\|^{(k)}} \geq \sqrt{k}.$$

Полученное противоречее и доказывает теорему. ■

Следствие 10.1. *Всякая обобщенная функция умеренного роста имеет конечный порядок, т.е. допускает продолжение как линейный непрерывный функционал из некоторого (наименьшего) сопряженного пространства $\mathscr{S}'_m$, при этом неравенство (10.1) принимает вид*

$$|(f,\phi)| \leq \|f^{(-m)}\|\phi\|^{(m)}, \quad \phi \in \mathscr{S}. \tag{10.2}$$

где $\|f\|^{(-m)}$ – норма функционала f в $\mathscr{S}'_m$, m – порядок f.

Таким образом справедливы соотношения

$$\mathscr{S}'_0 \subset \mathscr{S}'_1 \subset \mathscr{S}'_2 \subset \ldots, \qquad \mathscr{S}' = \bigcup_{p\geq 0} \mathscr{S}'_p.$$

Можно показать, что каждая слабо сходящаяся последовательность функционалов из $\mathscr{S}'_p$ сходится по норме в $\mathscr{S}'_{p+1}$. А тогда по теореме

Шварца, всякая слабо сходящаяся последовательность обобщенных функций медленного роста слабо сходится в некотором пространстве $\mathscr{S}'_p$ и, значит, сходится по норме в $\mathscr{S}'_{p+1}$, поскольку всякая слабо сходящаяся последовательность в $\mathscr{S}'$ есть слабо ограниченное множество в $\mathscr{S}'$. Пространство $\mathscr{S}'$ полно.

10.2. **Структура обобщенных функций медленного роста.**

Теорема 10.2. *Если $f \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$, то существует непрерывная функция g медленного роста на $\mathbb{R}^n$ и целое число $m \geq 0$ такие, что $f(x) = D_1^m \dots D_n^m g(x)$.*

Доказательство. Проведем его для случая $n = 1$. По теореме Шварца существуют числа K и p такие, что для любой $\varphi \in \mathscr{S}$ имеем

$$|(f, \varphi)| \leq K\|\varphi\|^{(p)}.$$

Но по (8.1) мы можем записать

$$\|\varphi\|^{(p)} = \sup_{\substack{x\in\mathbb{R}\\ \alpha\leq p}} \left| \int\limits_{-\infty}^{x} dy \frac{d}{dy}[(1+x^2)^{p/2}\varphi^{(\alpha)}(x)] \right| \leq$$

$$\leq \max_{\alpha \leq p} \int dx \left| \frac{d}{dx}[(1+x^2)^{p/2}\varphi^{(\alpha)}(x)] \right|,$$

так что

$$|(f, \varphi)| \leq K \max_{\alpha \leq p} \left\| \frac{d}{dx}[(1+x^2)^{p/2}\varphi^{(\alpha)}(x)] \right\|_{\mathcal{L}^1}.$$

Положим $\psi_\alpha = \dfrac{d}{dx}[(1+x^2)^{p/2}\varphi^{(\alpha)}(x)]$. Это сопоставляет каждой функции $\varphi \in \mathscr{S}$ набор $\{\psi_\alpha\}$, т.е. мы имеем отображение $\varphi \to \{\psi_\alpha\}$ из пространства $\mathscr{S}$ в пространство $\oplus_{\alpha\leq p}\mathcal{L}^1$ с нормой $\|\{f_\alpha\}\| = \max_{\alpha\leq p}\|f_\alpha\|_{\mathcal{L}^1}$. На линейном подмножестве $\{\{\psi_\alpha\}, \varphi \in \mathscr{S}\}$ пространства $\oplus_{\alpha\leq p}\mathcal{L}^1$ введем линейный функционал f^* посредством равенства $(f^*, \{\psi_\alpha\}) = (f, \varphi)$. В силу доказанного выше

$$|(f^*, \{\psi_\alpha\})| = |(f, \varphi)| \leq K \max_{\alpha\leq p} \|\psi_\alpha\|_{\mathcal{L}^1} \leq K\|\{\psi_\alpha\}\|,$$

так что функционал f^* непрерывен. Тогда в силу теоремы Хана–Банаха он непрерывно продлевается на все пространство $\oplus_{\alpha\leq p}\mathcal{L}^1$. Но, как известно $(\mathcal{L}^1)^* = \mathcal{L}^\infty$, так что в сопряженном пространстве $\oplus_{\alpha\leq p}\mathcal{L}^\infty$ существует вектор $\{\chi_\alpha\}$ такой, что

$$(f^*, \{\psi_\alpha\}) = \sum_{\alpha\leq p} \int dx \chi_\alpha(x)\psi_\alpha(x).$$

Итак, для любого $\varphi \in \mathscr{S}$:

$$(f,\varphi) = \sum_{\alpha\le p}\int dx\,\chi_\alpha(x)\frac{d}{dx}[(1+x^2)^{p/2}\varphi^{(\alpha)}(x)] =$$
$$= \sum_{\alpha\le p}\int dx g_\alpha(x)\varphi^{(\alpha+2)}(x).$$

Здесь добавлена одна производная в $\varphi^{(\alpha+2)}$, чтобы обеспечить непрерывность функции g_α, являющейся первообразной множителей функций $\varphi^{(\alpha+1)}(x)$ в первой строчке. Окончательно получаем:

$$f(x) = \frac{d^m}{dx^m}g(x),\ \text{где } m = p+2. \qquad \blacksquare$$

10.3. **Прямое произведение обобщенных функций и свертка.** Пусть заданы обобщенные функции $f(x)$ и $g(x)$. Пусть $\phi(x,y)$ – основная функция. Тогда прямое произведение $f\times g$ определяется как

$$(f(x)\times g(y),\phi(x,y)) = (f(x),(g(y),\phi(x,y))).$$

Свойства:

$$\begin{aligned} &\text{Коммутативность:} \quad && f(x)\times g(y) = g(y)\times f(x),\\ &\text{Ассоциативность:} \quad && f(x)\times\{g(y)\times h(z)\} = \{f(x)\times g(y)\}\times h(z). \end{aligned}$$

Доказательство следует из того факта, что любую основную функцию $\phi(x,y)$ можно приблизить суммами $\sum_{j=1}^n \phi_j(x)\psi_j(y)$, где $j = 1,2,\ldots$, $n = 1,2,\ldots$ и $\phi_j(x)$ и $\psi_j(y)$ – последовательности основных функций своих переменных. Кроме того,

$$(f(x)\times g(y),\phi(x)\psi(y)) = (f(x),\phi(x))(g(y),\psi(y)).$$

Для дальнейшего нам потребуется понятие **свертки** функций. Если $f(x)$ и $g(x)$ – две абсолютно интегрируемых функции на прямой, то их свертка определяется как

$$(f*g)(x) = \int dy f(y)g(x-y) \equiv \int dy f(x-y)g(y).$$

(1) Свертка линейна по каждому аргументу.
(2) Свертка коммутативна: $f*g = g*f$.
(3) Дистрибутивность: $f*(g+h) = f*g+f*h$.
(4) Ассоциативность: $f*(g*h) = (f*g)*h$ (Требует для своего доказательства существования и перестановочности всех интегралов.)

Так что для любой основной функции $\phi(x)$:

$$((f*g)(x),\phi(x)) = \int dx \int dy f(y)g(x)\phi(x+y).$$

Поэтому для обобщенных функций f и g мы определим свертку как

$$(f*g,\phi) = (f(x)\times g(y),\phi(x+y)),$$

если указанный функционал существует. Важно помнить, что $\phi(x+y)$ не есть основная функция двух переменных x и y, так что он не обязан существовать. В частности, это определение осмыслено, если

1) одна из обобщенных функций имеет ограниченный носитель;

2) носители обоих обобщенных функций ограничены с одной и той же стороны, например, $f=0$ при $x<a$ и $g=0$ при $y<b$.

Для доказательства следует рассмотреть выражения $(f(x),\phi(x+y))$. Так в случае 1) это – основная функция от y. Легко проверить, что

$$\begin{aligned}
&\delta * f = f \quad \text{для любой обобщенной функции} \quad f,\\
&f*g = g*f, \quad \text{по крайней мере в случаях 1) и 2)},\\
&(f*g)*h = f*(g*h),
\end{aligned}$$

если носители двух из трех функционалов ограничены, или когда носители всех трех ограничены с одной стороны, кроме того для любого дифференциального оператора D выпоняется

$$D(f*g) = Df*g = f*Dg.$$

Условия непрерывности свертки, а также равенство

$$\partial_x(f*g) = (\partial_x f)*g \equiv f*\partial_x g.$$

нужно проверять специально. Произведения обобщенных функций, вообще говоря, неопределены. Примеры: $\frac{1}{x}\delta(x)$, $x\frac{1}{x}\delta(x)$. Однако, возможны и исключения, например:

$$\theta(x)\theta(x-a) = \theta(x-a), \qquad a\geq 0.$$

Свертка двух произвольных обобщенных функций также не обязана существовать. Простейший пример – свертка двух функций, тождественно равных единице. Однако, когда одна из обобщенных функций из $\mathscr{S}'$, а другая – обобщенная функция с компактным носителем, или когда их носители ограничены с одной и той же стороны, то свертка существует. Пример:

$$(\theta*\theta)(x) = \theta(x)x. \tag{10.3}$$

Литература к лекции 10:

В.С.Владимиров "Обобщенные функции в математической физике";

И.М.Гельфанд, Г.Е.Шилов "Обобщенные функции и действия над ними", гл. I;

11. Лекция 11.

11.1. **Формулы Сохоцкого–Племеля.** Рассмотрим при $x \in \mathbb{R}_1$ функцию $(x+i\varepsilon)^{-1}$, где $\varepsilon > 0$. Эта функция, очевидно задает регулярную обобщенную функцию из $\mathscr{S}'$:

$$\big((x+i\varepsilon)^{-1}, \varphi(x)\big) = \int \frac{dx\,\varphi(x)}{x+i\varepsilon},$$

а из полноты $\mathscr{S}'$ следует, что существиет предел при $\varepsilon \to 0$, который обозначается

$$\big((x+i0)^{-1}, \varphi(x)\big) = \lim_{\varepsilon\to 0} \int \frac{dx\,\varphi(x)}{x+i\varepsilon}. \tag{11.1}$$

Связь этих обобщенных функций с другини, рассмотренными нами, дается формулы Сохоцкого–Племеля (справедливыми в более широкой области), которые для пространства $\mathscr{S}'$ имеют вид

$$\frac{1}{x+i0} = \text{p.v.}\frac{1}{x} - \pi i \delta(x), \qquad \frac{1}{x-i0} = \text{p.v.}\frac{1}{x} + \pi i \delta(x). \tag{11.2}$$

Докажем их.

$$\begin{aligned}
&\big((x+i0)^{-1}, \varphi(x)\big) = \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0}\left\{\int_{-1}^{+1} \frac{dx\,\varphi(x)}{x+i\varepsilon} + \int_{|x|>1} \frac{dx\,\varphi(x)}{x+i\varepsilon}\right\} = \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-1}^{+1} \frac{dx\,\varphi(x)}{x+i\varepsilon} + \int_{|x|>1} \frac{dx\,\varphi(x)}{x} = \\
&= \int_{-1}^{+1} \frac{dx\,(\varphi(x)-\varphi(0))}{x} + \int_{|x|>1} \frac{dx\,\varphi(x)}{x} + \varphi(0)\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-1}^{+1} \frac{dx\,(x-i\varepsilon)}{x^2+\varepsilon^2} = \\
&= \left(\frac{1}{x}, \varphi\right) - 2i\varphi(0)\lim_{\varepsilon\to 0} \operatorname{arctg}\frac{1}{\varepsilon}.
\end{aligned}$$

Выразим из этих формул обобщенные функции $\delta(x)$ и $1/x$ в смысле главного значения:

$$\begin{aligned}
\delta(x) &= \frac{i}{2\pi}\left(\frac{1}{x+i0} - \frac{1}{x-i0}\right), \\
\frac{1}{x} &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x+i0} + \frac{1}{x-i0}\right)
\end{aligned} \tag{11.3}$$

11.2. **Преобразование Фурье обобщенных функций из $\mathscr{S}'$.** Для произвольной основной функции определим преобразование Фурье посредством

$$F[\phi](k) = \int dx\, e^{ixk}\phi(x), \qquad F^{-1}[\psi](x) = \frac{1}{2\pi}\int dk\, e^{-ixk}\psi(k).$$

Часто используется обозначение $\widetilde{\phi}(k) = F[\phi](k)$. Поскольку $\phi(x)$ убывает на бесконечности быстрее любой степени x, ее преобразование Фурье можно дифференцировать под знаком интеграла любое число раз:

$$\partial^\alpha F[\phi](k) = \int dx\,(ix)^\alpha e^{ixk}\phi(x),$$

так что $F[\phi](k) \in C^\infty$. Аналогично, интегрируя по частям, получаем

$$k^\beta \partial^\alpha F[\phi](k) = i^{\alpha+\beta}\int dx\, e^{ixk} x^\alpha \partial^\beta \phi(x).$$

Отсюда следует, что при всех α и β функции $k^\beta\partial^\alpha F[\phi](k)$ равномерно ограничены по k на $\mathbb{R}$:

$$|k^\beta \partial^\alpha F[\phi](k)| \leq \int dx\,|x^\alpha \partial^\beta \phi(x)|.$$

Таким образом $F(\phi) \in \mathscr{S}$. Т.е. $\mathscr{S}$ переходит в $\mathscr{S}$, причем это отображение непрерывно в смысле топологии $\mathscr{S}$. Аналогичное утверждение легко получить и для обратного преобразования Фурье. Так как преобразование Фурье $F[\phi](k)$ основной функции $\phi \in \mathscr{S}$ есть интегрируемая и непрерывно дифференцируемая функция на $\mathbb{R}$, то согласно общей теории преобразования Фурье функция ϕ восстанавливается по $F[\phi](k)$ операцией обратного преобразования Фурье:

$$\phi = F[F^{-1}[\phi]] = F^{-1}[F[\phi]],$$

где

$$F^{-1}[\psi](x) = \frac{1}{2\pi}F[\psi](-x) = \frac{1}{2\pi}F[\psi(-k)](x),$$

так что, что всякая функция $\phi \in \mathscr{S}$ есть преобразование Фурье функции $\psi = F^{-1}[\phi]$, т.е. $\phi = F[\psi]$, причем, если $F[\phi] = 0$, то и $\phi = 0$. Другими словами, преобразование Фурье взаимно однозначно отображает $\mathscr{S}$ на $\mathscr{S}$, причем операция преобразования Фурье непрерывна из $\mathscr{S}$ в $\mathscr{S}$ (линейная взаимно непрерывная биекция), как следует из предыдущих формул.

Если обобщенная функция f задается абсолютно интегрируемой функцией $f(x)$, то ее преобразование Фурье существует

$$F[f](k) = \int dx\, e^{ikx} f(x)$$

и есть непрерывная, ограниченная в $\mathbb{R}$ функция, и, следовательно, опопределяет обобщенную функцию из $\mathscr{S}'$:

$$(F[f], \phi) = \int dk\, F[f](k)\phi(k).$$

Используя теорему о перемене порядка интегрирования, преобразуем последний интеграл:

$$\int dk\, F[f](k)\phi(k) = \int dk \left(\int dx\, e^{ikx} f(x) \right) \phi(k) =$$

$$\int dx\, f(x) \left(\int dk\, e^{ikx} \phi(k) \right),$$

так что для основной функции ϕ выполняется равенство

$$(F[f](k), \phi(k)) = (f(x), F[\phi](x)).$$

Для произвольной обобщенной функции из $\mathscr{S}'$ последнее равенство является определением преобразования Фурье:

$$(F[f](k), \phi(k)) = (f(x), F[\phi](x)),$$

причем это преобразование, как очевидно, также является непрерывным. Обратное преобразование определяется аналогично.

Свойства преобразования Фурье:

- $\partial_k^n (F[f](k)) = F[(ix)^n f](k)$,
- $F[\partial_x^n f] = (-ik)^n F[f]$,
- $F[f(x - x_0)](k) = e^{ix_0 k} F[f](k)$,
- $F[f](k + a) = F[e^{ixa} f(x)](k)$, где $a = const$,
- $F[f(x) \times g(x')] = F[f](k) \times F[g](k')$,
- $F[f * g] = F[f]F[g]$,

причем последнее выполняется только если свертка существует, а в правой части возникает произведение обобщенных функций. Условия существования свертки контролировать легче, чем условие существования произведения обобщенных функций, поэтому фурье-образ свертки фурье-образов обобщенных функций часто берется в качестве определения произведения обобщенных функций.

Примеры фурье-образов: $F[\delta] = 1$, $F[\theta](k) = \dfrac{i}{k + i0}$.

Из перечисленных свойств преобразования Фурье следует, что для любого дифференциального оператора с постоянными коэффициентами P выполнено равенство

$$F\left[P(i\partial_x)f(x)\right](k) = P(k)F[f](k),$$

которое является основой многочисленных приложений преобразования Фурье в различных разделах математики.

Показать, что в силу указанных свойств преобразования Фурье и его непрерывности

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{e^{ikx}}{k} = \pm i\pi\delta(k)$$

в смысле обобщенных функций от k.

Литература к лекции 11:

М.Рид, Б.Саймон “Методы современной математической физики”, том 2, “Гармонический анализ. Самосопряженность”;

В.С.Владимиров “Обобщенные функции в математической физике”;

И.М.Гельфанд, Г.Е.Шилов “Обобщенные функции и действия над ними”, гл. I;

12. Лекция 12. Unbounded operators in the Hilbert space.

12.1. **Domains, graphs, closed and adjoint operators.** The most important operators which occur in study are not bounded. Here we consider the basic definitions and theorems dealing with unbounded operators on Hilbert spaces. Any general unbounded operator T can only be defined on a dense linear subset of the $\mathscr{H}$. We will always suppose that the domain is dense. This subspace, which we denote by $D(T)$, is called the domain of the operator T. So, to identify an unbounded operator on a Hilbert space one must first give the domain on which it acts and then specify how it acts on that subspace.

Example 1 (the position operator). Let $\mathscr{H} = L^2(\mathbb{R})$ and let $D(T)$ be the set of functions $\varphi \in L^2(\mathbb{R})$ which satisfy $\int_{\mathbb{R}} dx\, x^2|\varphi(x)|^2 < \infty$. For $\varphi \in D(T)$ define $(T\varphi)(x) = x\varphi(x)$. It is clear that T is unbounded since if we choose φ to have support near plus or minus infinity, we can make $|T\varphi|$ as large as we like while keeping $|\varphi| = 1$. Of course, even if $\varphi \notin D(T)$ $x\varphi(x)$ has a well-defined meaning as a function, but it is not in $L^2(\mathbb{R})$. Thus, if we want to deal only with the Hilbert space $L^2(\mathbb{R})$ we must restrict the domain of T. The domain we have chosen is the largest one for which the range is in $L^2(\mathbb{R})$.

Besides the domain $D(T)$ of operator T we introduce its range

$$\mathrm{Ran}(T) = \{\psi \in \mathscr{H} \mid \psi = T\varphi,\, \varphi \in D(t)\}$$

and kernel (null subspace):

$$\mathrm{Ker}(T) = \{\varphi \in D(t) \mid T\varphi = 0.\}$$

If T maps $D(T)$ to $\mathrm{Ran}(T)$ in the one-to-one way then **inverse operator** T^{-1} exists:

$$T^{-1}T\varphi = \varphi \text{ for any } \varphi \in D(T); \quad TT^{-1}\psi = \psi \text{ for any } \psi \in \mathrm{Ran}(T).$$

Operator T has inverse T^{-1} if and only if from $T\varphi = 0$ follows $\varphi = 0$.

The notion of the graph of a linear transformation, introduced by von Neumann, is very useful for studying unbounded operators.

Определение 12.1. *The graph of the linear transformation T is the set of pairs*

$$\big\{\{\varphi, T\varphi\} \mid \varphi \in D(T)\big\}.$$

The graph of T, denoted by $\Gamma(T)$, is thus a subset of $\mathscr{H} \times \mathscr{H}$ which is a Hilbert space with inner product

$$\langle \{\varphi_1, \psi_1\}, \{\varphi_2, \psi_2\}\rangle = \langle \varphi_1, \psi_1\rangle + \langle \varphi_2, \psi_2\rangle.$$

*T is called a **closed** operator if $\Gamma(T)$ is a closed subset of $\mathscr{H} \times \mathscr{H}$.*

Определение 12.2. *Let T_1 and T be operators on $\mathscr{H}$. If $\Gamma(T_1) \supset \Gamma(T)$, then T_1 is said to be an* ***extension*** *of T and we write $T_1 \supset T$. Equivalently, $T_1 \supset T$ if and only if $D(T_1) \supset D(T)$ and $T_1\varphi = T\varphi$ for all $\varphi \in D(T)$.*

Определение 12.3. *An operator T is* ***closable*** *if it has a closed extension. Every closable operator has a smallest closed extension, called its* ***closure****, which we denote by $\overline{T}$.*

The trouble with this is that $\overline{\Gamma(T)}$ may not be the graph of an operator. However, most operators which we deal with will be symmetric operators and we will see that they always have closed extensions. It is easy to prove that if T is closable, then $\overline{\Gamma(T)} = \Gamma(\overline{T})$.

Adjoint operator.

Определение 12.4. *Let T be a densely defined linear operator on a Hilbert space $\mathscr{H}$. Let $D(T^*)$ be the set of $\varphi \in \mathscr{H}$ for which there is an $\eta \in \mathscr{H}$ with*

$$\langle T\psi, \varphi\rangle = \langle \psi, \eta\rangle \text{ for all } \psi \in D(T). \tag{12.1}$$

For each such $\varphi \in D(T^*)$, we define $T^*\varphi = \eta$. T^* is called the adjoint of T. By the Riesz lemma, $\varphi \in D(T^*)$ if and only if $|\langle T\psi, \varphi\rangle| \leq C\|\psi\|$ for all $\psi \in D(T)$.

We note that $S \subset T$ implies $T^* \subset S^*$. Notice that for η to be uniquely determined by (12.1) we need the fact that $D(T)$ is dense. It is necessary to mention that in the case of unbounded operators, the domain of T^* is not always dense. In particular, it is possible to have $D(T^*) = \{0\}$.

Example 4. Suppose that f is a bounded measurable function, but that $f \notin L^2(\mathbb{R})$. Let $D(T) = \{\psi \in L^2(\mathbb{R}) \mid \int dx|f(x)\psi(x)| < \infty\}$. Domain $D(T)$ certainly contains all the L_2 functions with compact support so $D(T)$ is dense in $L_2(\mathbb{R})$. Let ψ_0 be some fixed vector in $L_2(\mathbb{R})$ and define $T\psi = \langle f, \psi\rangle\psi_0$ for $\psi \in D(T)$. Suppose that $\varphi \in D(T^*)$, then

$$\begin{aligned}\langle \psi, T^*\varphi\rangle = \langle T\psi, \varphi\rangle = \langle\langle f, \psi\rangle\psi_0, \varphi\rangle = \overline{\langle f, \psi\rangle}\langle\psi_0, \varphi\rangle = \\ = \langle\psi_0, \varphi\rangle\langle\psi, f\rangle = \langle\psi, \langle\psi_0, \varphi\rangle f\rangle\end{aligned}$$

for all $\psi \in D(T)$. Thus $T^*\varphi = \langle\psi_0, \varphi\rangle f$. Since $f \notin L_2(\mathbb{R})$, the only possibility to have $T^*\varphi \in \mathscr{H}$ is to put $\langle\psi_0, \varphi\rangle = 0$. Thus any $\varphi \in D(T^*)$, is orthogonal to ψ_0 so $D(T^*)$ is not dense. In fact, $D(T^*)$ is just the vectors perpendicular to ψ_0 and on that domain T^* is the zero operator.

If the domain of T^* is dense, then we can define $T^{**} = (T^*)^*$. There is a simple relationship between the notions of adjoint and closure.

Теорема 12.1. *Let T be a densely defined operator on a Hilbert space $\mathscr{H}$. Then:*

1. *T^* is closed.*
2. *T is closable if and only if $D(T^*)$ is dense in which case $\overline{T} = T^{**}$.*
3. *If T is closable, then $(\overline{T})^* = T^*$.*

Proof of this theorem can be find in the literature cited by the end of the lecture.

12.2. **Spectrum of the operators.**

Определение 12.5. *Let T be a closed operator on a Hilbert space $\mathscr{H}$. A complex number λ is in the resolvent set, $\rho(T)$, if $\lambda I - T$ is a bijection of $D(T)$ onto $\mathscr{H}$ with a bounded inverse. If $\lambda \in \rho(T)$, $R_\lambda(T) = (\lambda I - T)^{-1}$ is called the resolvent of T at λ. If $\lambda \notin \rho(T)$, then λ is said to be in the spectrum $\sigma(T)$ of T.*

We note that by the inverse mapping theorem, $\lambda I - T$ automatically has a bounded inverse if it is bijective. We distinguish two subsets of the spectrum.

Определение 12.6. *Let $\varphi \in \mathscr{H}$.*

1. *An $\varphi \neq 0$ which satisfies $T\varphi = \lambda\varphi$ for some $\lambda \in \mathbb{C}$ is called an **eigenvector** of T; λ is called the corresponding **eigenvalue**. If λ is an eigenvalue, then $\lambda I - T$ is not injective so λ is in the spectrum of T. The set of all eigenvalues is called the **point spectrum** of T.*
2. *If λ is not an eigenvalue and if $Ran(\lambda I - T)$ is not dense, then λ is said to be in the **residual spectrum**.*

Литература к лекции 12: М.Рид, Б.Саймон “Методы современной математической физики”, том 1, “Функциональный анализ”.

13. Лекция 13

Теорема 13.1. *Let T be a closed densely defined linear operator. Then the resolvent set of T is an open subset of the complex plane on which the resolvent is an analytic operator-valued function, and $\{R_\lambda(T) \mid \lambda \in \rho(T)\}$ is a commuting family of bounded operators satisfying*

$$R_\lambda(T) - R_\mu(T) = (\mu - \lambda) R_\mu(T) R_\lambda(T). \tag{13.1}$$

Proof. Let $\lambda_0 \in \rho(T)$. We consider

$$\widetilde{R}_\lambda(T) = R_{\lambda_0}(T)\left(I + \sum_{n=1}^{\infty} (\lambda_0 - \lambda)^n [R_{\lambda_0}(T)]^n\right)$$

Since $\|[R_{\lambda_0}(T)]^n\| \le \|R_{\lambda_0}(T)\|^n$ the series on the right converges by operator norm if $|\lambda - \lambda_0| < \|R_{\lambda_0}(T)\|^{-1}$. For such λ operator $\widetilde{R}_\lambda(T)$ is well defined, and it is easily checked that

$$(\lambda I - T)\widetilde{R}_\lambda(T) = I = \widetilde{R}_\lambda(T)(\lambda I - T).$$

This proves that $\lambda \in \rho(T)$ if $|\lambda - \lambda_0| < \|R_{\lambda_0}(T)\|^{-1}$ and that $\widetilde{R}_\lambda(T) = R_\lambda(T)$. Thus $\rho(T)$ is open. Since $R_\lambda(T)$ has a power series expansion, it is analytic.

The expression

$$R_\lambda(T) - R_\mu(T) = R_\lambda(T)(\mu I - T)R_\mu(T) - R_\lambda(T)(\lambda I - T)R_\mu(T)$$

proves (13.1). Interchanging μ and λ shows that $R_\mu(T)$ and $R_\lambda(T)$ commute. ■

Equation (13.1) is called the first resolvent formula, or the Hilbert identity.

Further, many of the properties of operators which are important are very sensitive to the choice of domain.

Example 5. We denote by $AC[0,1]$ the set of absolutely continuous functions on $[0,1]$ whose derivatives are in $L_2[0,1]$. Let T_1 and T_2 be the operation id/dx with domains

- $D(T_1) = \{\varphi \mid \varphi \in AC[0,1]\}$,
- $D(T_2) = \{\varphi \mid \varphi \in AC[0,1] \text{ and } \varphi(0) = 0\}$.

Both $D(T_1)$ and $D(T_2)$ are dense in $L_2[0,1]$ and both of the operators are closed. But:

- The spectrum of T_1 is $\mathbb{C}$,
- The spectrum of T_2 is empty.

The proof that T_1 and T_2 are closed is left as an exercise. To see that the spectrum of T_1 is the whole plane we observe that

$$(\lambda I - T_1)e^{-i\lambda x} = 0 \text{ and } e^{-i\lambda x} \in D(T_1)$$

for all $\lambda \in \mathbb{C}$. As for T_2 , the operator

$$(S_\lambda g)(x) = i\int_0^x ds\, e^{-i\lambda(x-s)}g(s)$$

satisfies $(\lambda I - T_2)S_\lambda = I$ and $S_\lambda(\lambda I - T_2)$ is the identity on $D(T_2)$. Moreover,

$$\begin{aligned}
\|S_\lambda g\|_2^2 = \int_0^1 dx|(S_\lambda g)(x)|^2 \leq \\
&\leq \left(\sup_{x\in[0,1]} |(S_\lambda g)(x)|\right)^2 \leq \\
&\leq \left(\sup_{x\in[0,1]} \int_0^x ds\, |e^{-i\lambda(x-s)}g(s)|\right)^2 \leq \\
&\leq \left(\sup_{x\in[0,1]} \int_0^x ds\, |e^{-i\lambda(x-s)}|^2\right)\left(\sup_{x\in[0,1]} \int_0^x ds\, |g(s)|^2\right) \leq \\
&\leq C(\lambda)\|g\|_2^2,
\end{aligned}$$

so S_λ is bounded. By the remark immediately after the definition of resolvent set, we need only have shown that $\lambda I - T_2$ is a bijection to conclude that S_λ is bounded. So, we could have avoided the above computation.

13.1. **Symmetric and self-adjoint operators: the basic criterion for self-adjointness.**

Определение 13.1. *A densely defined operator T on a Hilbert space is called **symmetric** (or **Hermitian**) if $T \subset T^*$, that is, if $D(T) \subset D(T^*)$ and $T\varphi = T^*\varphi$ for all $\varphi \in D(T)$. Equivalently, T is symmetric if and only if*

$$\langle T\varphi, \psi\rangle = \langle \varphi, T\psi\rangle \text{ for all } \varphi, \psi \in D(T).$$

Определение 13.2. *T is called self-adjoint if $T = T^*$, that is, if and only if T is symmetric and $D(T) = D(T^*)$.*

A symmetric operator is always closable, since $D(T^*) \supset D(T)$ is dense in $\mathscr{H}$. If T is symmetric, T^* is a closed extension of T, so the smallest closed extension T^{**} of T must be contained in T^*. Thus for symmetric operators, we have

$$T \subset T^{**} \subset T^*.$$

For closed symmetric operators,

$$T = T^{**} \subset T^*.$$

And, for self-adjoint operators,

$$T = T^{**} = T^{*}.$$

From this one can easily see that a closed symmetric operator T is self-adjoint if and only if T^* is symmetric. The distinction between closed symmetric operators and self-adjoint operators is very important. It is only self-adjoint operators that may be exponentiated to give the one-parameter unitary groups which give the dynamics in quantum mechanics.

We introduce the useful notion of **essential self-adjointness**.

Определение 13.3. *A symmetric operator T is called essentially self-adjoint if its closure $\overline{T}$ is self-adjoint. If T is closed, a subset $D \subset D(T)$ is called a core (существенная область определения) for T if $\overline{T \restriction D} = T$.*

If T is essentially self-adjoint, then it has one and only one self-adjoint extension, for suppose that S is a self-adjoint extension of T. Then, S is closed and thereby, since $S \supset T$, $S \supset T^{**}$. Thus, $S = S^* \subset (T^{**})^* = T^{**}$, and so $S = T^{**}$. The converse is also true; namely, if T has one and only one self-adjoint extension, then T is essentially self-adjoint. Since $T^* = \overline{T^*} = T^{***}$, T is essentially self-adjoint if and only if $T \subset T^{**} = T^*$. If A is a self-adjoint operator, then to specify A uniquely one need not give the exact domain of A (which is often difficult), but just some core for A. Now, suppose that T is a self-adjoint operator and that there is a $\varphi \in D(T^*) = D(T)$ so that $T^*\varphi = i\varphi$. Then $T\varphi = i\varphi$ and

$$-i\langle\varphi,\varphi\rangle = \langle i\varphi,\varphi\rangle = \langle T\varphi,\varphi\rangle = \langle\varphi,T^*\varphi\rangle = \langle\varphi,T\varphi\rangle = i\langle\varphi,\varphi\rangle,$$

so $\varphi = 0$. A similar proof shows that $T^*\varphi = -i\varphi$ can have no solutions. The converse statement, that if T is a closed symmetric operator and $T^*\varphi = \pm i\varphi$ has no solutions, then T is self-adjoint, is the basic criterion of self-adjointness.

Теорема 13.2 (the basic criterion for self-adjointness)**.** *Let T be a symmetric operator on a Hilbert space $\mathscr{H}$. Then the following three statements are equivalent:*

(a) *T is self-adjoint.*
(b) *T is closed and $Ker(T^* \pm i) = 0$.*
(c) *$Ran(T \pm i) = \mathscr{H}$.*

Proof. We have just seen that (a) implies (b). Suppose that (b) holds; we will prove (c). Since $T^*\varphi = -i\varphi$ has no solutions, $\mathrm{Ran}(T-i)$ must be dense. Otherwise, if $\psi \in \mathrm{Ran}(T-i)^{\perp}$, we would have $((T-i)\varphi,\psi) = 0$

for all $\varphi \in D(T)$, so $\psi \in D(T^*)$ and $(T-i)^*\psi = (T^*+i)\psi = 0$ which is impossible since $T^*\psi = -i\psi$ has no solutions. (Reversing this last argument we can show that if $\mathrm{Ran}(T-i)$ is dense, the kernel of T^*+i is $\{0\}$.) Since $\mathrm{Ran}(T-i)$ is dense, we need only prove it is closed to conclude that $\mathrm{Ran}(T-i) = \mathscr{H}$. But for an $\varphi \in D(T)$

$$\|(T-i)\varphi\|^2 = \|T\varphi\|^2 + \|\varphi\|^2.$$

Thus if $\varphi_n \in D(T)$ and $(T-i)\varphi_n \to \psi_0$, we conclude that φ_n converges to some vector φ_0, and $T\varphi_n$ converges too. Since T is closed, $\varphi_0 \in D(T)$ and $(T-i)\varphi_0 = \psi_0$.Thus, $\mathrm{Ran}(T-i)$ is closed, so $\mathrm{Ran}(T-i) = \mathscr{H}$. Similarly, $\mathrm{Ran}(T+i) = \mathscr{H}$.

Finally, we will show that (c) implies (a). Let $\varphi \in D(T^*)$. Since $\mathrm{Ran}(T-i) = \mathscr{H}$, there is an $\eta \in D(T)$ so that $(T-i)\eta = (T^*-i)\varphi$. $D(T) \subset D(T^*)$, so $\varphi - \eta \in D(T^*)$ and $(T^*-i)(\varphi-\eta) = 0$. Since $\mathrm{Ran}(T+i) = \mathscr{H}$, $\mathrm{Ker}(T^*-i) = \{0\}$, so $\varphi = \eta \in D(T)$. This proves that $D(T^*) = D(T)$, so T is self-adjoint. ■

Следствие 13.1. *Let T be a symmetric operator on a Hilbert space. Then the following are equivalent:*

(a) *T is essentially self-adjoint.*

(b) *$Ker(T^* \pm i) = 0$.*

(c) *$Ran(T \pm i)$ are dense.*

Литература к лекции 13: М.Рид, Б.Саймон “Методы современной математической физики”, том 1, “Функциональный анализ”.

14. Лекция 14

14.1. **Operator id/dx on the interval.** This example shows that a symmetric operator may have many self-adjoint extensions. Lest the reader be misled we remark that a symmetric operator may have no self-adjoint extensions.

Example Let $T = id/dx$ with

$$D(T) = \{\varphi \,|\, \varphi \in AC[0,1],\, \varphi(0) = 0 = \varphi(1)\}.$$

A simple integration by parts shows that as an operator on $L_2[0,1]$, T is symmetric. We begin by determining T^*. First we introduce the approximate identity, $j_\varepsilon(x)$. Let $j(x)$ be any positive, infinitely differentiable function with support in $(-1,1)$ so that $\int_{-\infty}^{\infty} dx\, j(x) = 1$. Define $j_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-1} j(x/\varepsilon)$, $\varepsilon > 0$. Fix $0 < \alpha < \beta < 1$ and define

$$f_\varepsilon^{\alpha,\beta}(x) = j_\varepsilon(x-\beta) - j_\varepsilon(x-\alpha),$$
$$g_\varepsilon^{\alpha,\beta}(x) = \int_0^x dt\, f_\varepsilon^{\alpha,\beta}(x)$$

Let $\psi \in D(T^*)$. For ε small enough, $g_\varepsilon^{\alpha,\beta} \in D(T)$ so

$$\langle T g_\varepsilon^{\alpha,\beta}, \psi\rangle = \langle g_\varepsilon^{\alpha,\beta}, T^*\psi\rangle. \tag{14.1}$$

As $\varepsilon \to 0$, $-g_\varepsilon^{\alpha,\beta}$ converges to the characteristic function of (α,β) in $L_2(0,1)$ so

$$\langle g_\varepsilon^{\alpha,\beta}, T^*\psi\rangle \to -\int_\alpha^\beta dx\,(T^*\psi)(x).$$

Let define operators J_ε by means of

$$J_\varepsilon\varphi = \int_0^1 dt\, j_\varepsilon(x-t)\varphi(t),$$

where the r.h.s. converges in L_2 to $\varphi(x)$ if φ is continuous. Moreover, each J_ε is a bounded operator of norm not greater than one. For if $\psi \in L_2(0,1)$, then

$$\begin{aligned}
|\langle \psi, J_\varepsilon\varphi\rangle| &\le \int dt \int dx\, j_\varepsilon(x-t)|\varphi(t)||\psi(x)| = \\
&= \int dt \int dy\, j_\varepsilon(y)|\varphi(t)||\psi(y+t)| \le \\
&\le \|\varphi\|\|\psi\| \int dy\, j_\varepsilon(y) = \\
&= \|\varphi\|\|\psi\|.
\end{aligned}$$

By an $\varepsilon/3$ argument, $J_\varepsilon\varphi \xrightarrow{L^2} \varphi$ for all $\varphi \in L_2[0,1]$. Thus, the left side of (14.1) converges to $-i(\psi(\beta)-\psi(\alpha))$ in mean square as $\varepsilon \to 0$. So, for almost all α, β

$$i[\psi(\beta)-\psi(\alpha)] = \int_\alpha^\beta dx\,(T^*\psi)(x)$$

This means that ψ is absolutely continuous and

$$i\frac{d}{dx}\psi(x) = (T^*\psi)(x).$$

Thus, $\psi \in AC[0,1]$ and $T^*\psi = id\psi(x)/dx$. Conversely, integration by parts shows that any $\psi \in AC[0,1]$ is in the domain of T^* and $T^*\psi = id\psi/dx$. Therefore $T^* = id/dx$ on $D(T^*) = AC[0,1]$.

It is easy to see that T is not essentially self-adjoint since $e^{\pm x} \in D(T^*)$ and $ide^{\pm x}/dx = \pm ie^{\pm x}$. In fact, it is easy to prove that T is closed so T is a closed, symmetric but not self-adjoint operator. Does T have any self-adjoint extensions? Yes, uncountably many different ones! Let $\alpha \in \mathbb{C}$, $|\alpha| = 1$, and define $T_\alpha = id/dx$ on

$$D(T_\alpha) = \{\varphi \,|\, \varphi \in AC[0,1],\ \varphi(0) = \alpha\varphi(1)\}.$$

Each of these operators T_α is a different self-adjoint extension of T. Of course, each T_α is in turn extended by T^*.

14.2. **Spectral projectors and functional calculus.**

Пример 14.1. *Let $\mathscr{H} = \ell^2$ and Let operator T is given by*

$$T(x_1, x_2, \ldots) = (0, x_1, x_2, \ldots).$$

Then $R_0(T)$ is bounded, but $RanR_0(T)$ is not dense in $\mathscr{H}$, so point $\lambda = 0$ belongs to theresidual spectrum of operator T.

Теорема 14.1. *Let T be self-adjoint operator in the Hilbert space $\mathscr{H}$. Then any $\lambda \in \mathbb{C}$ with $\operatorname{Im}\lambda \neq 0$ belongs to the resolvent set $\rho(T)$ and resolvent $R_\lambda(T)$ is bounded linear operator, that obeys*

$$\|R_\lambda(T)\| \le \frac{1}{|\operatorname{Im}\lambda|}, \tag{14.2}$$

and

$$\operatorname{Im}\langle(\lambda I - T)\varphi, \varphi\rangle = \operatorname{Im}\lambda\|\varphi\|^2 \text{ for all } \varphi \in D(T). \tag{14.3}$$

Proof. If $\varphi \in D(T)$, then $\langle T\varphi, \varphi\rangle = \langle\varphi, T\varphi\rangle = \overline{\langle T\varphi, \varphi\rangle}$, so the scalar product $\langle T\varphi, \varphi\rangle$ is real. This proves (14.3). Now by the Schwartz inequality we have

$$\|(\lambda I - T)\varphi\| \cdot \|\varphi\| \ge |\langle(\lambda I - T)\varphi, \varphi\rangle| \ge |\operatorname{Im}\lambda| \cdot \|\varphi\|^2,$$

that gives

$$\|(\lambda I - T)\varphi\| \geq |\operatorname{Im}\lambda| \cdot \|\varphi\|, \qquad \varphi \in D(T).$$

Thus the inverse operator $(\lambda I - T)^{-1}$ exists if $\operatorname{Im}\lambda \neq 0$. Moreover, $\operatorname{Ran}(\lambda I - T)$ is dense in $\mathscr{H}$ under this condition. Indeed, in the other case there would exist $\psi \in \mathscr{H}$, $\psi \neq 0$, orthogonal to $\operatorname{Ran}(\lambda I - T)$. I.e. for such ψ we would have $\langle(\lambda I - T)\varphi, \psi\rangle = 0$ for all $\varphi \in D(T)$, that is equivalent to $\langle\varphi, (\overline{\lambda} I - T)\psi\rangle = 0$. But $D(T)$ of the self-adjoint operator is dense in $\mathscr{H}$, so the last equality means that that $(\overline{\lambda} I - T)\psi = 0$, i.e., that $T\psi = \overline{\lambda}\psi$. This contradicts to condition $\langle T\psi, \psi\rangle$ is real.

Thus for any complex λ with $\operatorname{Im}\lambda \neq 0$ the resolvent $R_\lambda(T)$ is bounded linear operator that obeys (14.2). ■

Below we give scheme of functional calculus, omitting some essential details of proofs. As we know for any $\varphi \in \mathscr{H}$ scalar product $\langle\varphi, R_\lambda(T)\varphi\rangle$, where T is an arbitrary self-adjoint operator, defines function of λ analytic in the upper and bottom half-planes of $\mathbb{C}$. This function is bounded, so it defines regular distribution in $\mathscr{S}'$ with respect to $\operatorname{Re}\lambda$ by means of the standard relation $\int d\lambda_{\mathrm{Re}}\langle\varphi, R_\lambda(T)\varphi\rangle f(\lambda_{\mathrm{Re}})$, where $f(\lambda_{\mathrm{Re}})$ is an arbitrary test-function in $\mathscr{S}$. Taking now that $\mathscr{S}'$ is closed into account one can prove that the limiting values of this distribution when $\operatorname{Im}\lambda \to \pm 0$ exist and are generated by means of some operators $R^{\pm}_{\lambda_{\mathrm{Re}}}(T)$ in the sense that

$$\lim_{\operatorname{Im}\lambda \to \pm 0} \int d\lambda_{\mathrm{Re}}\langle\varphi, R_\lambda(T)\varphi\rangle f(\lambda_{\mathrm{Re}}) = \int d\lambda_{\mathrm{Re}}\langle\varphi, R^{\pm}_{\lambda_{\mathrm{Re}}}(T)\varphi\rangle f(\lambda_{\mathrm{Re}}).$$

Such operators are called **operator-valued distributions**. Introduce now operator

$$P'(k) = \frac{i}{2\pi}\big(R^{+}_{k}(T) - R^{-}_{k}(T)\big), \quad k \in \mathbb{R}. \tag{14.4}$$

This is also operator-valued distribution and thanks to (13.1)

$$P'(k) = (\mu - k)P'(k)R_\mu(T) \text{ for any } k \in \mathbb{R} \text{ and any } \mu \in \mathbb{C}, \operatorname{Im}\mu \neq 0.$$

Then for such k and μ we can write

$$\frac{P'(k)}{\mu - k} = P'(k)R_\mu(T),$$

so that thanks to (11.3) we can perform procedure (14.4) with respect to μ, that gives

$$\delta(k - p)P'(k) = P'(k)P'(p). \tag{14.5}$$

Operator-valued distribution $P'(k)$ has primitive $P(k)$:

$$P'(k) = \frac{d}{dk}P(k),$$

while study of the asymptotic behavior of $P'(k)$ shows that one can write, say,

$$P(k) = \int\limits_{-\infty}^{k} ds\, P'(s). \tag{14.6}$$

Then by (14.5)

$$P(k)P'(k') = \theta(k-k')P'(k'). \tag{14.7}$$

So that $P(k)P'(k') = \dfrac{d}{dk'}\theta(k-k')P(k') + \delta(k'-k)P(k)$, and thank to normalization we derive

$$P(k)P(k') = \theta(k-k')P(k') + \theta(k'-k)P(k). \tag{14.8}$$

In particular

$$P^2(k) = P(k). \tag{14.9}$$

Taking that by (14.4) and (14.6) operator $P(k)$ is self-adjoint, we conclude that $P(k)$ is **orthogonal projector** and $P(k) \geq 0$. This operator is called **spectral projector**. In the same way we can prove that $P(k) \geq P(k')$ when $k \geq k'$. Finally, taking into account that by (14.4) $P(k)$ is difference of functions that admit analytic continuation in the upper and bottom half-planes, we derive

$$\int dk \frac{1}{\lambda - k} P'(k) = R_\lambda(T), \quad \operatorname{Im}\lambda \neq 0.$$

In this way one can prove that there exists limit $P_\infty = \int dk\, P'(k) \equiv 1$. Analogously one can prove that for any bounded function $f(k)$:

$$f(T) = \int dk\, f(k)P'(k). \tag{14.10}$$

In particular by (14.5)

$$f(T)g(T) = \int dk\, f(k)g(k)P'(k).$$

Литература к лекции 14: М.Рид, Б.Саймон “Методы современной математической физики”, том 1, “Функциональный анализ”.