Задачи к экзамену по курсу «Введение в математическую статистику»

Решения задач можно сдать в бумажном виде преподавателям, ведущим курс, либо отправить им до 23:59 21 декабря в электронном виде (sashaskrip@gmail.com, klimenko05@mail.ru).

В последнем случае все решения должны быть собраны в **один** pdf-файл, в котором страницы работы должны следовать **в правильном порядке и правильной ориентации**. При большом объёме файла можно разместить его в онлайн-хранилище (Яндекс.Диск, Google Drive и т. п.) и прислать только ссылку. Сканы и фото в других форматах рассматриваться не будут.

Также к работе следует приложить файл с расчётами для задачи 8 (программу на каком-либо языке программирования, Excel-таблицу с формулами и т. п.).

Итоговая оценка будет вычисляться по формуле $O = 1,5S - 2$, где S — сумма баллов за задачи. Округление производится до ближайшего целого, 0,5 округляется вверх. Если оценка O выходит за границы интервала $[1, 10]$, она заменяется ближайшей его границей.

1. (1 балл) Пусть случайные векторы $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ имеют многомерное нормальное распределение со средним μI и матрицей ковариации $\sigma^2 V$, где I — столбец единиц, а V — симметричная невырожденная матрица с известными постоянными коэффициентами.
 - Найти оценки максимального правдоподобия для μ и σ^2 ;
 - Пусть $\hat{\mu}$ и $\hat{\sigma}^2$ — оценки из предыдущего пункта. Найти математические ожидания $E(\hat{\mu})$ и $E(\hat{\sigma}^2)$;
 - Найти матрицу информации Фишера $I(\theta)$ для $\theta = (\mu, \sigma^2)^T$. Будет ли оценка $\hat{\mu}$ эффективна?
2. (1 балл) В рамках эксперимента радиус окружности измеряется с ошибкой $\varepsilon \sim N(0, \sigma^2)$, где σ известно. Пусть было проведено n независимых испытаний. Найти несмещенную оценку для площади ограниченного этой окружностью круга.
3. (0,5 балла) Виктор работает сомелье. Его ресторан закупает крымские вина, объем бутылок для которых может отличаться от написанного на бутылках и распределен по закону $N(\mu, 25)$, где μ — некоторый неизвестный параметр. Сколько бутылок из последней закупки нужно проверить Виктору, чтобы получить 95% доверительный интервал единичной длины для μ ?
4. (1 балл) Привести пример распределения, зависящего от параметра γ , для которого вариационный ряд является минимальной достаточной статистикой.
5. (2 балла) Пусть дано семейство распределений с плотностями $p_\theta = (\sin \theta)^2 (\cos \theta)^{2x}$ для целых неотрицательных x (плотность задана по отношению к считающей мере на множестве $\mathbb{Z}_+$). Здесь θ — неизвестный параметр, принадлежащий отрезку $[a, \frac{\pi}{2}]$, где a — известная положительная константа. Пусть $N_1, \dots, N_n$ — выборка в этой модели.
 - Найти достаточную статистику (по возможности, самого простого вида) и вычислить оценку максимального правдоподобия для θ .
 - Мы хотим проверить гипотезу $H_0: \theta \leq b$ (для какого-то $b > a$) против альтернативы $H_1: \theta > b$. Привести пример такого оптимального критерия, который бы подходил для решения этой задачи, при этом мы бы отвергали гипотезу на области $T_n > c$ для некоторой статистики T_n (её нужно указать явно). Можно ли найти явное значение для c ?
6. (0,5 балла) Есть две гипотезы: H_0 состоит в том, что элементы выборки имеют нормальное распределение, а H_1 — в том, что они распределены по закону Пуассона. Построить критерий, обладающий нулевыми вероятностями ошибок первого и второго рода.

7. (1 балл) Пусть $X_1, \dots, X_n$ — выборка из равномерного распределения на отрезке $[0, \theta]$. Найдите минимальную достаточную статистику и, используя её, построить равномерно наиболее мощный критерий размера ε для проверки гипотезы $H_0: \theta = \theta_1$ против альтернативы $H_1: \theta \neq \theta_1$.
8. (1 балл) Известно, что масса огурцов распределена по лог-нормальному закону с неизвестными параметрами μ и σ^2 . В каждой строке таблицы приведены результаты взвешивания 100 огурцов, выращивавшихся в одинаковых условиях (то есть их массы образуют выборку из вышеуказанного распределения). Для «своей» строки постройте доверительные интервалы для μ и σ (не σ^2 !) с уровнем доверия 90%.
9. (1 балл) Курс статистики Мумбайского технологического университета сдаёт 10000 студентов. Профессор построил таблицу из предыдущей задачи, сгенерировав в каждой строке выборку из лог-нормального распределения со своими параметрами μ_i, σ_i^2 ($i = 1, \dots, 10000$). Все студенты верно решили задачу, найдя доверительный интервал $\hat{I}_i$ для σ с уровнем доверия ровно 90%. Найдите приближённо вероятность того, что число N номеров i , для которых $\sigma_i \notin \hat{I}_i$, лежит в интервале $1000 \leq N \leq 1024$.