

Материалы к семинарам по матанализу

14-я неделя (11.12–15.12.2017)

Краткое содержание лекций

Лекция 15. Комплексные числа (13.12.2017)

1. Локальная нормальная форма неплоской функции
2. Комплексные числа и арифметические действия над ними в алгебраической форме. Примеры вычислений
3. Комплексные числа и арифметические действия над ними в геометрической форме. Примеры вычислений
4. Формула Муавра и извлечение корней. Примеры вычислений

Примерные задачи семинаров 27 и 28

Разные задачи

Определение 1. Бесконечно гладкая функция называется плоской в точке, если все ее производные, начиная с нулевой, равны нулю в этой точке. Сама эта точка называется точкой уплощения функции. Функция называется неплоской, если у нее нет точек уплощения.

Задача 13.1. Докажите, что если функция на отрезке имеет n корней, то на этом же отрезке есть точка, в которой ее $(n - 1)$ -я производная обращается в ноль.

Задача 13.2. Докажите, что если функция на отрезке имеет бесконечно много корней, то на этом же отрезке у нее есть точка уплощения.

Задача 13.3. Докажите, что точки перегиба функции — это экстремумы ее первой производной.

Задача 13.4. Выведите формулу Лейбница для n -й производной: $(fg)^{(n)} = ?$.

Комплексные числа

Задача 13.5. Вычислите: $(1 + i)^{2017}$; $\left(\frac{1 + \sqrt{3}i}{1 - \sqrt{3}i}\right)^{2017}$.

Задача 13.6. Вычислите: $\sqrt[3]{8}$, $\sqrt[3]{-8}$, $\sqrt[6]{64}$, \sqrt{i} , $\sqrt[3]{i}$.

Задача 13.7. Представьте $\cos 5x$ в виде многочлена от $\cos x$.

Задача 13.8. Докажите, что корни n -й степени из ненулевого комплексного числа образуют правильный n -угольник.

Задача 13.9. Докажите, что уравнение $z\bar{z} + az + \bar{a}\bar{z} + b = 0$, где $b \in \mathbb{R}$ задаёт окружность, точку либо пустое множество. Как по значениям a и b определить, какой из трёх случаев имеет место? Каковы центр и радиус окружности?

Задача 13.10* Какое множество задаёт уравнение $z\bar{z} + az + a'\bar{z} + b = 0$, если $a, a', b \in \mathbb{C}$ — произвольные параметры?

Задача 13.11. Докажите, используя комплексные числа, что множество точек X , для которых $Ax = kBX$ (A, B — заданные точки, $k \neq 1$ — положительное число), является окружностью.

Задача 13.12. Докажите, что преобразование $z \mapsto az + b$ переводит прямые в прямые и окружности в окружности. Как описать это преобразование геометрически?

Задача 13.13. Докажите, что преобразования вида $z \mapsto (az + b)/(cz + d)$, где $ad - bc \neq 0$, (они называются дробно-линейными) образуют группу. Докажите, что группа дробно-линейных преобразований порождается преобразованиями из предыдущей задачи и отображением $z \mapsto 1/z$.

Задача 13.14. Докажите, что преобразование $z \mapsto (az+b)/(cz+d)$ переводит окружность или прямую в окружность или прямую.

Задача 13.15* Докажите, что это отображение сохраняет угол между окружностями (т. е. между касательными в точке пересечения).