Семинар 1.
Проективная геометрия

Задача 1. Рассмотрим проективную прямую $\mathbb{P}^1 = P(V)$, где V – двумерное векторное пространство над полем $\mathbf{k}$. Для произвольного ненулевого вектора $x \in V$ через $< x >$ будем обозначать соответствующую точку в $\mathbb{P}^1$, то есть одномерное подпространство в V, натянутое на вектор x. Напомним, что если e_0, e_1 – базис в V, то его класс пропорциональности называется *проективной системой координат* в $\mathbb{P}^1$, а для произвольной точки $A =< x >\in \mathbb{P}^1$ ее *проективными координатами* $(x_0 : x_1)$ (в указанной системе координат) называется класс пропорциональности пары скаляров (x_0, x_1) таких, что $x = x_0e_0 + x_1e_1$.

Покажите, что для трех различных точек $E_0, E_1, E \in \mathbb{P}^1$ существует единственная проективная система координат $(x_0 : x_1)$ в $\mathbb{P}^1$, в которой $E_0 = (1 : 0),\ E_1 = (0 : 1),\ E = (1 : 1)$.

Задача 2. Покажите, что дополнение $U_0 = \mathbb{P}^1 \setminus \{< e_1 >\}$ к точке $< e_1 >$ в $\mathbb{P}^1$ можно отождествить с аффинной прямой $\mathbb{A}^1$ (над $\mathbf{k}$) посредством биекции

$$f:\ U_0 \xrightarrow{\sim} \mathbb{A}^1,\quad (x_0 : x_1) \mapsto x_1/x_0.$$

(В этом случае точка $< e_1 >$ называется *бесконечно удаленной точкой аффинной прямой* $\mathbb{A}^1$, и используется обозначение $< e_1 >= \infty$. При этом U_0 называется *аффинной картой* в $\mathbb{P}^1$.)

Указание. Для доказательства биективности f найдите обратное к f отображение.

Задача 3. Найдите число точек на
а) проективной прямой над конечным полем $\mathbf{k} = \mathbb{F}_q$,
б) проективной плоскости над конечным полем $\mathbb{F}_q$.

Задача 4. Три точки $A,\ B,\ C$ (не обязательно различные) на проективной плоскости $\mathbb{P}^2$ заданы своими проективными координатами: $A = (a_0 : a_1 : a_2),\ B = (b_0 : b_1 : b_2),\ C = (c_0 : c_1 : c_2)$. Напишите в этих координатах условие коллинеарности точек $A,\ B,\ C$.

Задача 5. В проективном пространстве $\mathbb{P}^n$ даны два проективных подпространства $\mathbb{P}^{m_1}$ и $\mathbb{P}^{m_2}$.
а) Докажите, что пересечение $\mathbb{P}^{m_1} \cap \mathbb{P}^{m_2}$ либо пусто, либо является проективным подпространством в $\mathbb{P}^n$.
б) Докажите, что если пересечение $\mathbb{P}^{m_1} \cap \mathbb{P}^{m_2}$ пусто, то размерность проективной оболочки $\mathrm{Span}(\mathbb{P}^{m_1} \cup \mathbb{P}^{m_2})$ подпространств $\mathbb{P}^{m_1}$ и $\mathbb{P}^{m_2}$ равна $m_1 + m_2 + 1$. (Напомним, что *проективной оболочкой* $\mathrm{Span}(M)$ *подмножества* M в $\mathbb{P}^n$ называется наименьшее проективное подпространство в $\mathbb{P}^n$, содержащее M.)