

ВВТ. Листок №1, 11 января 2017.

1.1. Для высказываний

A - « $\forall \varepsilon > 0 \exists N \forall n > N |x_n - a| < \varepsilon$ »,

B - « $\forall \varepsilon > 0 \forall N \exists n > N |x_n - a| < \varepsilon$ »,

C - « $\forall \varepsilon > 0 \exists N \exists n > N |x_n - a| < \varepsilon$ »,

выяснить справедливость импликаций $A \Rightarrow B, B \Rightarrow A, B \Rightarrow C, C \Rightarrow B, A \Rightarrow C, C \Rightarrow A$.

Если импликация верна – доказать, если импликация неверна – привести пример.

1.2. На отрезке $[0;1]$ постройте множество всех чисел, которые можно записать в виде десятичной дроби без цифр «1» и «7» и докажите, что всякая непрерывная на этом множестве числовая функция достигает своего наименьшего значения.

1.3. Привести пример функции $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ которая ограничена, строго возрастает, и множество точек разрыва которой – это \mathbb{Q} .

1.4. Доказать, что:

а) множество $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ невозможно представить в виде объединения счётного числа замкнутых множеств (т.е. что $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ - не является множеством типа F_σ);

б) не существует функции $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, множество точек разрыва которой – это $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

1.5. Все точки квадрата $[0;1] \times [0;1]$, координаты которых принадлежат канторовскому множеству, спроектировали (ортогонально) на прямую $y=x$. Докажите, что образ проекции – это вся диагональ квадрата.

1.6. Пусть $X \subset \mathbb{R}$ и всякое непрерывное отображение $f: X \rightarrow X$ имеет хотя бы одну неподвижную точку. Докажите, что X - отрезок.

1.7. Пусть отображение $f: X \rightarrow f(X)$ - биективно и непрерывно, а X – компакт.

а) Доказать, что отображение $f^{-1}: f(X) \rightarrow X$ непрерывно (кратко, f – гомеоморфизм).

б) Привести пример того, что без условия компактности, f^{-1} может быть разрывным.

1.8. Приведите пример того, что в метрическом пространстве:

а) открытый шар большего радиуса может быть подмножеством открытого шара меньшего радиуса;

б) последовательность вложенных замкнутых шаров может иметь пустое пересечение.

Приём задач из этого листка (Ф. Н. Пахомов, Ю. В. Саватеев, П. В. Семёнов):

пятница, 19 января, 10-30 (группа Ф. Н. Пахомова), 17-00 (группа Ю. В. Саватеева),

в отдельных случаях – между 12-00 и 17-00.