Лекции 1, 2-18. Ряды и аналитические функции

Часть 1. Числовые ряды

1 Полнота $\mathbb{C}$.

Определение 1 *Предел последовательности и фундаментальная последовательность комплексных чисел определяются так же, как предел и фундаментальная последовательность вещественных чисел.*

Теорема 1 *Последовательность комплексных чисел сходится тогда и только тогда, когда она фундаментальна.*

Доказательство Последовательность $(z_n = x_n + iy_n)$ сходится (фундаментальна) тогда и только тогда, когда сходятся (фундаментальны) обе последовательности (x_n) и (y_n). $\square$

2 Ряды с комплексными членами.

Определение 2 *Сумма ряда из комплексных чисел - это предел последовательности его частных сумм.*

Определение 3 *Ряд сходится абсолютно, если сходится ряд из модулей его членов.*

Теорема 2 *Абсолютно сходящийся ряд из комплексных чисел сходится.*

Доказательство Доказательство такое же, как в вещественном случае. $\square$

Задача 1 *Докажите, что члены сходящегося ряда стремятся к нулю.*

3 Признаки сходимости.

Определение 4 *Если выполнено условие $|b_j| < a_j,\ j \in \mathbb{N}$, то говорят, что ряд $\sum_i b_j$ мажорируется рядом $\sum a_j$.*

Теорема 3 (Теорема сравнения.) *Если ряд мажорируется сходящимся, то он сам сходится.*

Доказательство Доказательство такое же, как в вещественном случае. □

Следующие две теоремы основаны на сравнении ряда со сходящейся геометрической прогрессией.

Теорема 4 (Признак Коши.) *Пусть*

$$\overline{\lim}\sqrt[n]{|a_n|} = q < 1.$$

Тогда ряд $\sum a_n$ *сходится.*

Теорема 5 (Признак Даламбера.) *Пусть*

$$\overline{\lim}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = q < 1.$$

Тогда ряд $\sum a_n$ *сходится.*

Часть 2. Функциональные последовательности и ряды

4 Сходимость функций, поточеченая и равномерная.

Определение 5 *Последовательность функций* $f_n : X \to \mathbb{C}$ *сходится поточечно, если* $\forall\ x \in X$ *последовательность* $(f_n(x))$ *сходится.*

Определение 6 *Последовательность функций* $f_n : X \to \mathbb{C}$ *сходится равномерно к функции* f *если* $\max_X |f - f_n| \to 0$ *при* $n \to \infty$*. Обозначение:* $f_n \rightrightarrows f$ *на* X*.*

Теорема 6 *Предел равномерно сходящейся последовательности непрерывных функций непрерывен.*

Примеры 1 $x^n \to f(x)$ *на* $[0,1]$*;* $fx = \begin{cases} 0 \text{ при } x \in [0,1) \\ 1 \text{ при } x = 1. \end{cases}$

Примеры 2 $x^n \rightrightarrows 0$ *на* $[-q,q]$ $\forall q \in (0,1)$.

Примеры 3 $^n \rightrightarrows 0$ *на* $\{|z| \le q\}$ $\forall q \in (0,1)$.

Определение 7 *Функциональный ряд сходится равномерно, если равномерно сходятся его частные суммы.*

5 Признак Вейерштрасса

Определение 8 *Числовой ряд* $\sum a_n$ *с положительными членами* мажорирует *функциональный ряд* $\sum f_n,\ f_n : X \to \mathbb{C}$*, если* $a_n \geq \max_X f_n$

Теорема 7 *Если сходящийся числовой ряд* $\sum a_n$ *с положительными членами мажорирует функциональный ряд* $\sum f_n,\ f_n : X \to \mathbb{C}$*, то этот последний ряд сходится на* X *равномерно.*

Часть 3. Степенные ряды и аналитические функции

6 Степенные ряды

Определение 9 *Функциональный ряд, все частные суммы которого - многочлены, записанные по возрастанию степеней, называется степенным рядом или рядом Тейлора.*

Примеры 4 *Ряды* $\sum z^n$ *и* $\sum q^n z^n$ *при каждом фиксированном* z *представляют собой геометрические прогрессии. При* $|z| \geq 1$ *члены первого ряда не стремятся к нулю, и ряд расходится. При любом* $r < 1$ *первый ряд равномерно сходится в круге радиуса* r *с центром 0. Число 1 называется радиусом сходимости первого ряда. Для второго ряда все вышесказанное выполняется если 1 заменить на* $\frac{1}{q}$*. Число* $\frac{1}{q}$ *называется радиусом сходимости второго ряда.*

Расмотрим произвольный ряд Тейлора

$$\sum a_n z^n,\ a_n \in \mathbb{C}. \tag{1}$$

eqn:tey

Чтобы найти область его сходимости, его надо сравнить с геометрической прогрессией. Ответ похож на предыдущие примеры.

Определение 10 *Радиусом сходимости степенного ряда называется такое* R*, что вне круга радиуса* R *с центром в нуле ряд расходится, а в любом круге радиуса* $r < R$ *с центром 0 ряд сходится равномерно.*

Теорема 8 *Радиус сходимости степенного ряда* (1) *равен*

$$R = \frac{1}{\overline{lim}\sqrt[n]{|a_n|}}. \tag{2}$$

eqn:rad

Доказательство Доказательство проводится сравнением ряда с геометрической прогрессией. □

7 Аналитические функции

Любой функции, бесконечно гладкой в окрестности нуля, соответствует ее формальный ряд Тейлора.

Определение 11 *Бесконечно гладкая функция, к которой сходится ее ряд Тейлора, называется аналитической. Точнее, функция называется аналитической в некоторой точке, если ее ряд Тейлора в этой точке сходится к ней в некоторой окрестности этой точки. Функция называется аналитической в области, если она аналитична в каждой точке этой области.*

Задача 2 *Приведите пример степенного ряда, который не сходится нигде, кроме нуля.*

Задача 3 *Докажите, что функция* $2^{-\frac{1}{x^2}}$ *- бесконечно гладкая на всей прямой. Найдите ряд Тейлора в нуле этой функции.*

Задача 4 *Докажите, что для любой последовательности чисел* a_n *существует функция, имеющая все производные в нуле, ряд Тейлора которой в нуле имеет вид* (1).

Задача 5 **Докажите теорему Бореля: для любой последовательности чисел* a_n *существует функция, имеющая все производные на всей прямой, ряд Тейлора которой в нуле имеет вид* (1).

Эти задачи показывают, что ряд Тейлора функции может расходиться, и может сходиться, но не к ней. Ничего подобного для аналитических функций не происходит.

Для решения последних двух задач нужно воспользоваться срезающими функциями: бесконечно гладкими функциями, равными нулю вне некоторой окрестности нуля и равными 1 внутри некоторой меньшей окрестности нуля. Само существование таких функций - тоже задача. Мы решим ее позже, а сейчас предположим, что хотя бы одна такая функция $\varphi(x)$ существует.