

Материалы к семинарам по матанализу 2 (второй семестр)

1-я и 2-я неделя (8.1 - 19.1, 2018)

Краткое содержание лекций

Лекции 1 - 3. Аналитические функции и ряды

1. Полнота \mathbb{C} .
2. Ряды с комплексными членами и признаки сходимости.
3. Функциональные последовательности и ряды. Поточечная и равномерная сходимость.
4. Степенные ряды. Радиус сходимости.
5. Аналитические функции.

Примерные задачи семинаров 1–3

Преобразования комплексной плоскости

Задача 1.1. Дайте геометрическую интерпретацию следующих преобразований:

а) $z \rightarrow \bar{z}$, б) $z \rightarrow \bar{z} + 1$, в) $z \rightarrow i\bar{z} + 1$, г) $z \rightarrow iz + 1$, д) $z \rightarrow iz + (2 - 2i)$.

Задача 1.2. Найдите необходимое и достаточное условие того, чтобы преобразование $z \rightarrow a\bar{z} + b$ было осевой симметрией.

Задача 1.3. Голоморфны ли функции z , \bar{z} , $|z|^2$, z^2 ?

Задача 1.4. Пусть $|a| = 1$. Докажите, что функция $\arg(z + a\bar{z})$ принимает лишь два значения. Какие это значения и при каких z принимается каждое из них?

Задача 1.5. Найдите необходимое и достаточное условие того, чтобы преобразование $z \rightarrow az + b\bar{z} + c$ было движением.

Числовые ряды

Задача 1.6. Докажите, что члены сходящегося ряда стремятся к нулю.

Задача 1.7. Докажите, что если ряд с положительными монотонно убывающими членами a_n сходится, то $na_n \rightarrow 0$.

Задача 1.8. При каких a ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \sin na$ сходится?

Задача 1.9. Найдите сумму ряда:

а) $\sum_{n=0}^{\infty} q^n \sin nx$, $|q| < 1$, б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$, в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n-2)(3n+1)}$.

Задача 1.10. Сходятся ли ряды:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$, б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(2n)^n}$, в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)^n}{2^{n^2}}$, г) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^2}$,
д) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}}{n}$, е) $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n+1} - 2\sqrt{n} + \sqrt{n-1}$, ж) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$.

Задача 1.11. При каких a сходится ряд $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}}{n^a}$?

Функциональные последовательности и ряды

Задача 1.12. Сходятся ли равномерно на интервале $(0, \infty)$ функциональные последовательности (a_n) , $n \in \mathbb{N}$ и ряды $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, где:

а) $a_n = \frac{1}{x+n}$, б) $a_n = \frac{1}{x+n-1}$, в) $a_n = \frac{1}{x+n^2}$, г) $a_n = \frac{1}{n^x}$.

Последний ряд задаёт знаменитую ζ -функцию Римана.

Задача 1.13. Сходится ли равномерно на интервале $(2, \infty)$ ряд для ζ -функции Римана?

Задача 1.14. Может ли последовательность разрывных функций равномерно сходиться к непрерывной функции?

Степенные ряды

Задача 1.15. Найдите радиусы сходимости для следующих степенных рядов:

а) $\sum_{n=0}^{\infty} n^2 x^n$, б) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$, в) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$,

г) $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n x^n$, д) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n + 2^n}{4^n + 3^n} x^n$.

Задача 1.16. Два степенных ряда имеют радиусы сходимости R_1 и R_2 соответственно. Что можно сказать о радиусе сходимости их суммы?

Задача 1.17. Приведите пример степенного ряда, который не сходится нигде, кроме нуля.

Задача 1.18. Докажите, что функция $f(x) = 2^{-\frac{1}{x^2}}$ бесконечно гладкая на всей прямой. Найдите ряд Тейлора в нуле этой функции.

Задача 1.19. Найдите ряды Тейлора в нуле для функций:

а) $\sin x$, б) $\cos x$, в) $(1+x)^a$, г) $\frac{\sin x}{x}$.