Группы и алгебры Ли II

Семинар 1

1. Докажите, что у произвольного конечного множества попарно коммутирующих операторов на конечномерном комплексном векторном пространстве есть общий собственный вектор. Можно ли отказаться от условий конечности множества операторов или от условия конечномерности векторного пространства?

2. Приведите пример приводимого, но неразложимого конечномерного комплексного представления какой-нибудь группы.

3. Докажите, что для линейно зависимых x, y, z тождество Якоби

$$[x,[y,z]]+[y,[z,x]]+[z,[x,y]]=0$$

следует из антикоммутативности операции $[\ ,\ ]$.

4. Докажите, что группа GL_n раскладывается в полупрямое произведение SL_n и некоторой одномерной подгруппы.

5. Докажите, что группа $O_n(\mathbb{R})$ является группой Ли, и найдите её размерность.

6. Опишите все гомоморфизмы аддитивной группы Ли поля $\mathbb{C}$ в группу $GL_n(\mathbb{C})$.

7. Докажите, что централизатор Z_g любого элемента $g \in GL_n$ является подгруппой Ли и найдите минимальную возможную размерность Z_g.

8. Является ли присоединённое представление $SL_2(\mathbb{C})$ неприводимым? Тот же вопрос про $SL_n(\mathbb{C})$.

Lie groups and Lie algebras II

Seminar 1

1. Prove that a finite of mutually commuting operators on a finite-dimensional vector space has a common eigenvector. What about infinite family or infinite-dimensional vector space?

2. Give an example of a reducible, but indecomposable representation of a group.

3. Prove that for linear dependent x, y, z the Jacobi identity Якоби

$$[x,[y,z]]+[y,[z,x]]+[z,[x,y]]=0$$

is implied by the skew-symmetry of the bracket $[\ ,\ ]$.

4. Decompose the group GL_n into a semi-direct product of SL_n and a one-dimensional group.

5. Prove that $O_n(\mathbb{R})$ is a Lie group and find its dimension.

6. Find all homomorpisms from the additive group of the field $\mathbb{C}$ to the group $GL_n(\mathbb{C})$.

7. Prove that the cetralizer Z_g of an element $g \in GL_n$ is a Lie subgroup and find the minimal possible dimension of Z_g.

8. The the adjoint representation of $SL_2(\mathbb{C})$ irreducible? The same question for $SL_n(\mathbb{C})$.