

# MathminThPh

## I. Гармонический осциллятор

Уравнение движения гармонического осциллятора под действием вынуждающей силы

$$\ddot{x}(t) + \omega^2(t)x(t) = f(t), \quad \dot{x} \equiv \frac{d}{dt}x.$$

Определим задачу на интервале времени  $t_i < t < t_f$  (это значит, что на этом интервале определены функции  $f(t)$  и  $\omega(t)$  и нужно найти зависимость  $x(t)$ . Предполагается, что эти функции вещественны).

Формально нужно решить неоднородное дифференциальное линейное уравнение второго порядка. Общее решение такого уравнения устроено следующим образом

$$x(t) = c_1x_1(t) + c_2x_2(t) + x_0(t),$$

то есть, это - линейная оболочка, построенная на двух линейно независимых решениях однородного уравнения

$$\ddot{x}_1 + \omega^2x_1 = 0, \quad \ddot{x}_2 + \omega^2x_2 = 0, \quad W = x_1\dot{x}_2 - \dot{x}_1x_2 = \text{const} \neq 0,$$

плюс какое-либо частное решение  $x_0(t)$  неоднородного уравнения. Это решение можно найти, зная  $x_1(t), x_2(t)$  (метод вариации постоянных).

Пусть

$$x_0(t) = C_1(t)x_1(t) + C_2(t)x_2(t).$$

Сделана интересная замена переменных. Вместо одной неизвестной функции введены две неизвестные функции  $C_1(t), C_2(t)$ . Зачем? Дело в том, что, когда это понадобится, можно на эти функции наложить дополнительное требование, связав их. Чтобы вычислить вторую производную, вычислим первую

$$\dot{x}_0(t) = C_1(t)\dot{x}_1(t) + C_2(t)\dot{x}_2(t) + \dot{C}_1(t)x_1(t) + \dot{C}_2(t)x_2(t).$$

Воспользуемся представленной возможностью, положив

$$\dot{C}_1(t)x_1(t) + \dot{C}_2(t)x_2(t) = 0. \tag{1}$$

Вторая производная

$$\ddot{x}_0(t) = C_1(t)\ddot{x}_1(t) + C_2(t)\ddot{x}_2(t) + \dot{C}_1(t)\dot{x}_1(t) + \dot{C}_2(t)\dot{x}_2(t).$$

Уравнение движения принимает вид

$$\dot{C}_1(t)\dot{x}_1(t) + \dot{C}_2(t)\dot{x}_2(t) = f(t). \quad (2)$$

Из линейной системы на  $\dot{C}_1(t), \dot{C}_2(t)$  (уравнения (1) и (2)) находим

$$\dot{C}_1(t) = -\frac{1}{W}x_2(t)f(t), \quad \dot{C}_2(t) = \frac{1}{W}x_1(t)f(t).$$

Общее решение уравнения движения

$$x(t) = \frac{1}{W} \int_t^{t_1} d\tau x_1(t)x_2(\tau)f(\tau) + \frac{1}{W} \int_{t_2}^t d\tau x_1(\tau)x_2(t)f(\tau). \quad (3)$$

Вместо постоянных  $c_1, c_2$  введены две новые вещественные постоянные -  $t_1, t_2$ . Эти постоянные должны определяться из дополнительных к уравнениям движения условиям задачи.

Например, пусть в начальный момент времени осциллятор покоился в положении равновесия (задача Коши)

$$x(t_i) = 0, \quad \dot{x}(t_i) = 0.$$

Используя линейность уравнения выберем решения однородного уравнения, удовлетворяющие вот таким начальным условиям

$$x_1(t_i) = 1, \quad \dot{x}_1(t_i) = 0, \quad x_2(t_i) = 0, \quad \dot{x}_2(t_i) = 1.$$

В этом случае

$$x(t) = \int_{t_i}^t d\tau [x_2(t)x_1(\tau) - x_1(t)x_2(\tau)]f(\tau). \quad (4)$$

Если определить „функцию“ на действительной оси (функция Хевисайда)

$$\Theta(t) = \begin{cases} 1, & t > 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases},$$

(кавычки поставлены потому, что эта функция будет использоваться так, что совсем неважно чему эта функция равна при  $t = 0$ ), то решение поставленной задачи Коши для уравнения движения осциллятора представимо в виде

$$x(t) = \int_{t_i}^{t_f} d\tau G^R(t, \tau)f(\tau), \quad G^R(t, \tau) = \Theta(t - \tau)[x_2(t)x_1(\tau) - x_1(t)x_2(\tau)]. \quad (5)$$

Таким образом, решение поставленной задачи Коши - линейный функционал от вынуждающей силы  $f$ , который определяется *запаздывающей функцией Грина*  $G^R(t, \tau)$ .

Гармонический осциллятор с постоянной частотой  $\omega(t) = \omega_0$ . В этом случае

$$x_1(t) = \cos \omega_0(t - t_i), \quad x_2(t) = \frac{\sin \omega_0(t - t_i)}{\omega_0},$$

поэтому запаздывающая функция Грина равна

$$G^R(t, \tau) = \Theta(t - \tau) \frac{\sin \omega_0(t - \tau)}{\omega_0}.$$

Итак, функция Грина, решающая поставленную задачу, определяется не только рассматриваемым уравнением, но и дополнительными условиями на решение этой задачи (запаздывающая функция Грина - задача Коши).

#### А. Причинная функция Грина.

Уравнение движения гармонического осциллятора под действием вынуждающей силы получается из принципа наименьшего действия. Суть этого принципа, применительно к нашей задаче: пусть в момент времени  $t_i$  осциллятор находится в положении  $x_i$ , а в момент времени  $t_f$  в положении  $x_f$ . Тогда истинная траектория движения между этими положениями та, которая минимизирует функционал

$$S[x(\tau)] = \frac{1}{2} \int_{t_i}^{t_f} d\tau [\dot{x}^2(\tau) - \omega^2(\tau)x^2(\tau) + 2x(\tau)f(\tau)], \quad x(t_i) = x_i, \quad x(t_f) = x_f.$$

Чтобы найти истинную траекторию нужно выполнить *вариационную процедуру*. Рассмотрим траекторию, „немного“ отличающуюся от истинной  $x_0(\tau)$ :  $x(\tau) = x_0(\tau) + \varepsilon \delta x(\tau)$ , где  $\varepsilon$  - малый параметр. Найдем отличие действия  $S[x(\tau) + \varepsilon \delta x(\tau)]$  от действия на истинной траектории  $S[x_0(\tau)]$  в первом порядке малости по  $\varepsilon$ . Траектория  $x_0(\tau)$  - экстремальная, если это отличие обращается в нуль:

$$\begin{aligned} S[x(\tau) + \varepsilon \delta x(\tau)] - S[x_0(\tau)] &= \varepsilon \int_{t_i}^{t_f} d\tau \left[ \dot{x}_0(\tau) \frac{d}{d\tau} \delta x(\tau) + x_0(\tau) \delta x(\tau) \right] + O(\varepsilon^2) = \\ &= \varepsilon [x_0(t_f) \delta x(t_f) - x_0(t_i) \delta x(t_i)] - \varepsilon \int_{t_i}^{t_f} d\tau \delta x(\tau) [\ddot{x}_0(\tau) + \omega^2(\tau)x_0(\tau) - f(\tau)] + O(\varepsilon^2). \end{aligned}$$

Первый член во второй строке равен нулю, так как согласно принципу наименьшего действия  $\delta x(t_i) = \delta x(t_f) = 0$ . Чтобы второй член обратился в нуль при произвольной  $\delta x(\tau)$ , должно выполняться уравнение движения на истинную траекторию

$$\ddot{x}_0(\tau) + \omega^2(\tau)x_0(\tau) = f(\tau),$$

с дополнительными условиями

$$x_0(t_i) = x_i, \quad x_0(t_f) = x_f.$$

Таким образом, решается то же самое уравнение, но с другими дополнительными условиями (краевая задача).

Найдем причинную функцию Грина для осциллятора с постоянной частотой и граничными условиями  $x(t_i) = x(t_f) = 0$ . В качестве решений однородного уравнения выберем

$$x_1 = \sin \omega_0(t - t_i), \quad x_2 = \sin \omega_0(t_f - t).$$

Эти решения линейно не зависимы, если

$$W = -\omega_0 \sin \omega_0(t_f - t_i) \neq 0,$$

то есть, если  $\omega_0(t_f - t_i) \neq \pi n$ ,  $n = 0, 1, \dots$ . Так как  $x_1(t_i) = x_2(t_f) = 0$ , из (3) следует

$$x(t) = \int_{t_i}^{t_f} d\tau G^F(t, \tau) f(\tau),$$

здесь причинная функция Грина

$$G^F(t, \tau) = -\frac{1}{\omega_0 \sin \omega_0(t_f - t_i)} \left[ \Theta(\tau - t) \sin \omega_0(t - t_i) \sin \omega_0(t_f - \tau) + \Theta(t - \tau) \sin \omega_0(t_f - t) \sin \omega_0(\tau - t_i) \right],$$

Итак, решения разных задач о поведении гармонического осциллятора - это *линейный функционал* от внешней силы, заданной на временах  $t_i < t < t_f$ , который определяется функцией Грина поставленной задачи:

$$x(t) = \int d\tau G(t, \tau) f(\tau) \equiv (G_t, f).$$

В этой формуле интегрирование по  $\tau$  распространено на всю действительную ось. Это просто сделать, если определить функцию  $f(t)$  нулем вне отрезка  $(t_i, t_f)$ .

### В. Дискретная версия гармонического осциллятора.

Будем считать время дискретным

$$\begin{array}{ccccccc} k=0 & k=1 & & & & & k=N \\ | & | & & \longrightarrow & & & | \\ x_0 & x_1 & \dots & x_k & \dots & & x_N \end{array}$$

Естественно определить производную по времени следующим образом

$$\dot{x}(t) \longrightarrow \frac{x_{k+1} - x_k}{\epsilon}, \quad \epsilon = \frac{t_f - t_i}{N}.$$

Действие для дискретной динамики осциллятора (интегрирование заменяется на суммирование)

$$S[x_k] = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{N-1} \epsilon \left[ \frac{(x_{k+1} - x_k)^2}{\epsilon^2} - \omega_k^2 x_k^2 + 2f_k x_k \right].$$

Найдем уравнения движения ( $\delta x_0 = \delta x_N = 0$ )

$$\begin{aligned} S[x_k + \delta x_k] - S[x_k] &= \sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{\epsilon} \left[ (x_{k+1} - x_k)(\delta x_{k+1} - \delta x_k) - \epsilon^2 (\omega_k^2 x_k - f_k) \delta x_k \right] = \\ &= - \sum_{k=1}^{N-1} \frac{1}{\epsilon} \delta x_k \left[ (x_{k+1} - 2x_k + x_{k-1}) + \epsilon^2 (\omega_k^2 x_k - f_k) \right]. \end{aligned}$$

Итак, уравнения движения

$$\frac{x_{k+1} - 2x_k + x_{k-1}}{\epsilon^2} + \omega_k^2 x_k = f_k, \quad k = 1, \dots, N-1, \quad x_0 = x_i, \quad x_N = x_f.$$

Если определить матрицу  $N-1 \times N-1$

$$A = \left\| \begin{array}{cccccc} d_1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & \ddots & 1 & 0 & \vdots \\ 0 & 1 & d_k & 1 & 0 \\ \vdots & 0 & 1 & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & d_{N-1} \end{array} \right\|, \quad d_k = \epsilon^2 \omega_k^2 - 2,$$

то уравнения движения сводятся к задачи линейной алгебры

$$\sum_{k=1}^{N-1} A_{i,k} x_k = \epsilon^2 f_i - x_i \delta_{i,1} - x_f \delta_{i,N-1}, \quad i = 1, \dots, N-1.$$

Решение:

$$x_i = \sum_{k=1}^{N-1} (A^{-1})_{i,k} f_k - (A^{-1})_{i,1} x_i - (A^{-1})_{i,N-1} x_f, \quad i = 1, \dots, N-1.$$

Таким образом, дискретный аналог задачи о функции Грина дифференциального уравнения с дополнительными условиями - нахождение матрицы, обратной заданной дискретными уравнениями движения. Показать (для осциллятора с постоянной частотой), что в пределе  $N \rightarrow \infty$  решение дискретной задачи переходит в решение непрерывной задачи.

## II. Обобщенные функции

В данном разделе даны лишь краткие сведения об обобщенных функциях. Систематическое изучение и необходимая литература - курс А.Погребкова „Прикладные методы анализа“.

Пусть  $\mathcal{D}$  множество всех комплекснозначных бесконечно дифференцируемых функций  $f(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$ , от  $n$  вещественных переменных. Кроме того, пусть эти функции финитны (обращаются в нуль вне некоторой конечной области в  $\mathbb{R}^n$ ). Тогда это множество называется *пространством основных функций*  $\mathcal{D}$ . Это линейное пространство. Сходимость: последовательность  $f_1(x), \dots, f_k(x), \dots$ , сходится к нулю, если все функции последовательности обращаются в нуль вне одной и той же ограниченной области и равномерно сходятся к нулю, как и все их производные любого порядка.

*Обобщенная функция*  $G$ , заданная на пространстве  $\mathcal{D}$ , - линейный непрерывный функционал на  $\mathcal{D}$  ( $\mathcal{D}'$ ):

$$(G, \alpha f + \beta g) = \alpha(G, f) + \beta(G, g), \quad f, g \in \mathcal{D}, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{C},$$

$$(G, f_1), (G, f_2), \dots, (G, f_k), \dots \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0, \quad \text{если } f_1, f_2, \dots, f_k, \dots \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0.$$

Если на  $\mathcal{D}'$  определить линейность

$$(\alpha F + \beta G) = \alpha(F, f) + \beta(G, f), \quad \text{для любой } f \in \mathcal{D},$$

и слабую сходимость

$$G_1, \dots, G_k, \dots \xrightarrow{k \rightarrow \infty} G, \quad \text{если } (G_1, f), \dots, (G_k, f), \dots \xrightarrow{k \rightarrow \infty} (G, f), \quad \text{для любой } f \in \mathcal{D},$$

то  $\mathcal{D}'$  - пространство обобщенных функций.

Важная теорема о полноте:

пусть последовательность  $G_1, \dots, G_k, \dots \in \mathcal{D}'$  такова, что для любой  $f \in \mathcal{D}$  последовательность  $(G_1, f), \dots, (G_k, f), \dots$  при  $k \rightarrow \infty$  сходится. Тогда функционал, определенный равенством

$$(G, f) = \lim_{k \rightarrow \infty} (G_k, f)$$

принадлежит  $\mathcal{D}'$ .

Регулярные обобщенные функции - функционал, порождаемый локально интегрируемой в  $\mathbb{R}^n$  функцией  $F(x)$ :

$$(F, f) \stackrel{\text{def}}{=} \int dx F(x) f(x), \quad f \in \mathcal{D}, \quad dx = dx_1 \dots dx_n,$$

если обобщенная функция не регулярная, то она - сингулярная. Важная роль регулярных обобщенных функций - это источник определений операций над обобщенными функциями.

$\delta$ -функция Дирака (сингулярная):

$$(\delta, f) \stackrel{\text{def}}{=} f(0), \quad f \in \mathcal{D}.$$

Линейная невырожденная замена переменных в обобщенных функциях:

$$(G(Ax + b), f) \stackrel{\text{def}}{=} \left( G, \frac{1}{|\det A|} f(A^{-1}(x - b)) \right), \quad f \in \mathcal{D}.$$

Мультипликатор

$$(\varphi G, f) \stackrel{\text{def}}{=} (G, \varphi f), \quad f \in \mathcal{D}, \quad \varphi f \in \mathcal{D}.$$

Дифференцирование обобщенных функций

$$(\partial_{x_k} G, f) \stackrel{\text{def}}{=} -(G, \partial_{x_k} f), \quad f \in \mathcal{D},$$

из этого определения следует важное свойство - любая обобщенная функция бесконечно дифференцируема.

Формула Сохоцкого.

Определим линейный непрерывный функционал (нужно доказать), то есть обобщенную функцию  $\mathcal{P} \frac{1}{x} \in \mathcal{D}'$

$$\left( \mathcal{P} \frac{1}{x}, f \right) = \text{Vp} \int dx \frac{f(x)}{x} \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[ \int_{-\infty}^{-\epsilon} dx \frac{f(x)}{x} + \int_{\epsilon}^{\infty} dx \frac{f(x)}{x} \right], \quad f \in \mathcal{D}.$$

Тогда в  $\mathcal{D}'$  справедливо соотношение

$$\lim_{\epsilon \rightarrow +0} \frac{1}{x + i\epsilon} \equiv \frac{1}{x + i0} = \mathcal{P} \frac{1}{x} - i\pi\delta(x).$$

Доказать, максимально используя математическую культуру доказательства.

Преобразование Фурье.

Отнесем к множеству основных функций бесконечно дифференцируемые функции, убывающие на бесконечности ( $|x| \rightarrow \infty$ ) вместе со всеми производными быстрее любой степени  $1/|x|$ . Последовательность функций  $f_1, \dots, f_k, \dots \in \mathcal{S}$  сходится к функции  $f \in \mathcal{S}$  при  $k \rightarrow \infty$ , если для всех  $m, n$  есть равномерная сходимость

$$x^m f_k^{(n)}(x) \rightarrow x^m f^{(n)}(x), \quad k \rightarrow \infty,$$

здесь  $f^{(n)}$  - производная  $n$ -ого порядка.

Линейное пространство с такой сходимостью - пространство основных функций Шварца ( $\mathcal{S}$ ). Справедливо включение  $\mathcal{D} \subset \mathcal{S}$ .

Обобщенная функция медленного роста - линейный непрерывный функционал на пространстве основных функций  $\mathcal{S}$ . Сходимость - *слабая* сходимость последовательности функционалов. Соответствующее линейное пространство - пространство обобщенных функций медленного роста  $\mathcal{S}'$ . Включение  $\mathcal{S}' \subset \mathcal{D}'$ . Всякая обобщенная функция медленного роста есть непрерывный функционал относительно некоторой нормы (теорема Л.Шварца).

Если  $G(x)$  - локально интегрируемая функция полиномиального роста на бесконечности:

$$\int dx \frac{|G(x)|}{(1 + |x|)^m} < \infty$$

для некоторого  $m \geq 0$ , то она определяет регулярный функционал

$$(G, f) = \int dx G(x)f(x), \quad f \in \mathcal{S}.$$

Преобразование Фурье основных функций из пространства  $\mathcal{S}$

$$F[f](k) \equiv f_k = \int dx e^{-i(k,x)} f(x), \quad f \in \mathcal{S}, \quad (k, x) = k_1 x_1 + \dots + k_n x_n.$$

Преобразование Фурье переводит пространство  $\mathcal{S}$  в себя.

Обратное преобразование Фурье

$$f(x) = F^{-1}[F[f]](x) = \int \frac{dk}{(2\pi)^n} e^{i(k,x)} f_k.$$



Преобразование Фурье в  $\mathcal{S}'$

$$(F[G], f) \stackrel{\text{def}}{=} (G, F[f]), \quad G \in \mathcal{S}', \quad f \in \mathcal{S}.$$

Преобразование Фурье обобщенных функций медленного роста линейно и непрерывно из  $\mathcal{S}'$  в  $\mathcal{S}'$ .

### III. Электростатическая задача

Пусть в пространстве размерности  $d = 3$  задано статическое распределение заряда (финитная функция)  $\varrho(\vec{x})$ ,  $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$ -декартовы координаты. Найти электрическое поле, создаваемое этим распределением.

Редуцированные уравнения Максвелла в этом случае

$$\text{div} \vec{E}(\vec{x}) = \varrho(\vec{x}), \quad \text{rot} \vec{E}(\vec{x}) = 0.$$

Из второго уравнения следует (найти условия), что  $\vec{E}(\vec{x}) = -\vec{\nabla} \phi(\vec{x})$ , здесь  $\phi(\vec{x})$  - электростатический потенциал. Тогда из первого уравнения получаем уравнение на электростатический потенциал, которое нужно решить

$$\Delta \phi(\vec{x}) = -\varrho(\vec{x}), \quad \Delta = \frac{\partial^2}{(\partial x_1)^2} + \frac{\partial^2}{(\partial x_2)^2} + \frac{\partial^2}{(\partial x_3)^2}. \quad (6)$$

Выполним преобразование Фурье электростатического потенциала и распределения заряда

$$\begin{aligned} \phi(\vec{x}) &= \int \frac{d\vec{k}}{(2\pi)^3} e^{i\vec{k}\vec{x}} \phi_{\vec{k}}, \quad \varrho(\vec{x}) = \int \frac{d\vec{k}}{(2\pi)^3} e^{i\vec{k}\vec{x}} \varrho_{\vec{k}}, \quad \vec{k} = (k_1, k_2, k_3), \\ \phi_{\vec{k}} &= \int d\vec{x} e^{-i\vec{k}\vec{x}} \phi(\vec{x}), \quad \varrho_{\vec{k}} = \int d\vec{x} e^{-i\vec{k}\vec{x}} \varrho(\vec{x}). \end{aligned}$$

Уравнение (6) для Фурье-компонент принимает алгебраический вид

$$-\vec{k}^2 \phi_{\vec{k}} = -\varrho_{\vec{k}}, \quad \phi_{\vec{k}} = \frac{1}{\vec{k}^2} \varrho_{\vec{k}}, \quad \vec{k} \neq 0.$$

Выражение для потенциала

$$\begin{aligned} \phi(\vec{x}) &= \int \frac{d\vec{k}}{\vec{k}^2 (2\pi)^3} e^{i\vec{k}\vec{x}} \int d\vec{y} e^{-i\vec{k}\vec{y}} \varrho(\vec{y}) = \frac{1}{(2\pi)^2} \lim_{\Lambda \rightarrow \infty} \int_0^\Lambda dk \int_0^\pi d\theta \sin \theta \int d\vec{y} e^{ik|\vec{x}-\vec{y}|\cos \theta} \varrho(\vec{y}) = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2} \lim_{\Lambda \rightarrow \infty} \int d\vec{y} \varrho(\vec{y}) \int_0^\Lambda dk \int_0^\pi d\theta \sin \theta e^{ik|\vec{x}-\vec{y}|\cos \theta} = \\ &= \frac{1}{2\pi^2} \lim_{\Lambda \rightarrow \infty} \int d\vec{y} \frac{\varrho(\vec{y})}{|\vec{x}-\vec{y}|} \int_0^\Lambda dk \frac{\sin(|\vec{x}-\vec{y}|k)}{k} = \frac{1}{4\pi} \int d\vec{y} \frac{\varrho(\vec{y})}{|\vec{x}-\vec{y}|}, \end{aligned}$$

(последний шаг в цепочке равенств следует подробно обосновать).

Итак, задача решена

$$\vec{E}(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi} \int d\vec{y} \varrho(\vec{y}) \frac{\vec{x} - \vec{y}}{|\vec{x} - \vec{y}|^3}.$$

#### IV. Задачи

1. Осциллятор с постоянной частотой в момент времени  $t = 0$  находится в состоянии покоя в положении равновесия. В течение времени  $T$  на осциллятор действует вынуждающая сила  $f = F_0 \sin(\Omega t)$ ,  $\Omega T = 2\pi$ . В момент времени  $T$  найти зависимости амплитуды и фазы гармонического осциллятора от параметров вынуждающей силы. Построить соответствующие графики.

2. Найти два решения уравнения

$$\ddot{x}(t) + \frac{1}{4t^2} x(t) = 0, \quad t > 0,$$

с начальными условиями  $x(1) = 1, \dot{x}(1) = 0$  и  $x(1) = 0, \dot{x}(1) = 1$ .

3. Найти опережающую функцию Грина  $G^A$  (дополнительные условия:  $x(t_f) = \dot{x}(t_f) = 0$ ) осциллятора с постоянной частотой  $\omega_0$ . На пространстве  $\mathcal{D}'$  вычислить

$$\left[ \frac{d^2}{(dt)^2} + \omega_0^2 \right] G^A.$$

4. Дискретная по времени версия действия частицы, к которой приложена внешняя сила  $f$ , зависящая только от дискретного времени, имеет вид

$$S = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{N-1} \epsilon \left[ \frac{(x_{k+1} - x_k)^2}{\epsilon^2} + 2f_k x_k \right], \quad x_0 = 0, \quad x_N = 0, \quad \epsilon = \frac{t_f - t_i}{N}.$$

Используя принцип наименьшего действия, найти уравнения движения и решить их. Выполнить предельный переход  $N \rightarrow \infty$  и найти причинную функцию Грина соответствующей (какой?) непрерывной задачи.

5. Вычислить интеграл

$$\int dx_1 \dots dx_{N-1} \exp \left[ -\frac{1}{2\epsilon} \sum_{i,j=1}^{N-1} x_i A_{i,j} x_j + \epsilon \sum_{i=1}^{N-1} x_i f_i \right], \quad \epsilon > 0,$$

если матрица  $A_{i,j} = 2\delta_{i,j} - \delta_{i,j+1} - \delta_{i+1,j}$ ,  $\delta_{i,j}$ -символ Кронекера.

6. В пространстве  $\mathcal{D}'$  найти пределы

$$\frac{1}{2\sqrt{\pi\epsilon}} \exp\left[-\frac{x^2}{4\epsilon}\right], \quad \epsilon \rightarrow +0, \quad x \in \mathbb{R}^1; \quad \frac{\sin Nx}{\pi x}, \quad N \rightarrow \infty, \quad x \in \mathbb{R}^1.$$

7. В пространстве  $\mathcal{S}'$  найти решения  $G_\omega$  уравнения

$$(\omega^2 - \omega_0^2)G_\omega = -1, \quad \omega_0 > 0, \quad \omega \in \mathbb{R}^1.$$

Построить решение, которое аналитически продолжается с оси  $\mathbb{R}^1$  на всю верхнюю полуплоскость  $\mathbb{C}$ . Рассматривая это решение как фурье-образ некоторой функции  $G(t)$  из  $\mathcal{S}'$ , найти и назвать эту функцию.

8. Найти преобразование Фурье функций из  $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^1)$ :

$$\Theta(x), \quad \delta(x - x_0), \quad e^{-ax^2}, \quad \frac{1}{x^2 + a^2}, \quad a > 0.$$

9. Найти поток векторного поля  $\frac{\vec{x}}{|\vec{x}|^3}$  через поверхность  $(x-1)^2 + y^2 + z^2 = 2$ .

10. Найти электрическое поле в трехмерном пространстве, создаваемое сферой (шаром) заряда  $Q$  в предположении о равномерном распределении последнего.

11. Решить электростатическую задачу на плоскости ( $d = 2$ ).

## V. Частица в Q-двумерной мелкой яме

Связанное состояние в квантовой теории - нормированный вектор гильбертова пространства  $|\phi\rangle \in \mathcal{H}$ . Наблюдаемые - самосопряженные операторы, действующие на гильбертовом пространстве. Эти операторы строятся по классическим аналогам наблюдаемых в гамильтоновом формализме путем замены координат фазового пространства на канонические самосопряженные операторы  $\hat{x}_i, \hat{p}_i$ ,  $i = 1, \dots, s$  ( $s$ -число степеней свободы), на которые накладываются канонические коммутационные соотношения

$$[\hat{x}_i, \hat{p}_j] = i\hbar\delta_{i,j}\hat{1}, \quad [\hat{x}_i, \hat{x}_j] = 0 = [\hat{p}_i, \hat{p}_j],$$

здесь  $\hbar$ - постоянная Планка.

Измерение наблюдаемой  $\hat{H}$  в состоянии  $|\phi\rangle$  - задача на собственные значения

$$\hat{H} |\phi_n\rangle = \lambda_n |\phi_n\rangle :$$

прибор показывает собственное значение  $\lambda_n$  с вероятностью  $|\langle \phi_n | \phi \rangle|^2$ .

В координатном представлении канонических коммутационных соотношений состояние  $|\phi\rangle$  представляется комплекснозначной квадратично интегрируемой функцией  $\phi(x_1, \dots, x_s) \in L_2(dx_1 \dots dx_s, (x_1, \dots, x_s) \in \mathbb{R}^s)$ , скалярное произведение

$$\langle \phi_1 | \phi_2 \rangle = \int dx_1 \dots dx_s \bar{\phi}_1(x_1, \dots, x_s) \phi_2(x_1, \dots, x_s),$$

а операторы координат и импульсов действуют следующим образом

$$\hat{x}_i |\phi\rangle \implies x_i \phi(x_1, \dots, x_s), \quad \hat{p}_i |\phi\rangle \implies -i\hbar \frac{\partial}{\partial x_i} \phi(x_1, \dots, x_s).$$

Все приведенные утверждения носят декларативный характер и должны быть уточнены при систематическом изучении квантовой теории.

При движении частицы в двумерной яме классический гамильтониан

$$H_{cl} = \frac{1}{2m}(p_1^2 + p_2^2) + U(x_1, x_2), \quad U(x_1, x_2) = \begin{cases} -U_0, & \sqrt{x_1^2 + x_2^2} < a \\ 0, & \sqrt{x_1^2 + x_2^2} > a \end{cases},$$

$m$ -масса частицы,  $U_0$ ,  $a$ -глубина и ширина ямы, соответственно.

Соответствующая квантовая задача о связанном состоянии в двумерной яме

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \left( \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \right) \phi_n(x_1, x_2) + U(x_1^2 + x_2^2) \phi_n(x_1, x_2) = E_n \phi_n(x_1, x_2),$$

$\phi(x_1, x_2) \in L_2(dx_1 dx_2, (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2)$ .

Мелкая яма характеризуется тем, что в ней есть лишь одно связанное состояние. Энергия этого состояния  $E_0$  отрицательна, а собственное состояние  $\phi_0(\varrho)$ ,  $\varrho = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ , аксиально симметрично.

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \left( \partial_\varrho^2 + \frac{1}{\varrho} \partial_\varrho \right) \phi_0(\varrho) + U(\varrho) \phi_0(\varrho) = -|E_0| \phi_0(\varrho), \quad \phi_0(\varrho) \in L_2(2\pi \varrho d\varrho, 0 < \varrho < \infty).$$

Вообще говоря, от функции  $\phi_0(\varrho)$  нужно требовать, чтобы она принадлежала области определения самосопряженного гамильтониана.

Обезразмерим уравнение

$$\varrho = a_0 u, \quad a_0 = \frac{\hbar}{\sqrt{2mU_0}}, \quad \varepsilon = -\frac{E_0}{U_0} < 1;$$

$$[u \partial_u^2 + \partial_u + u(\Theta(u_0 - u) - \varepsilon)] \phi_0 = 0, \quad u_0 = \frac{a\sqrt{2mU_0}}{\hbar} \ll 1 \text{ (мелкая яма)}.$$

Итак, находим решения двух уравнений

$$\begin{aligned} [u\partial_u^2 + \partial_u + u(1 - \varepsilon)]\phi_0 &= 0, & u < u_0, \\ [u\partial_u^2 + \partial_u - u\varepsilon]\phi_0 &= 0, & u > u_0, \end{aligned}$$

исходя из предъявленных требований, и сшиваем эти решения при  $u = u_0 \ll 1$ , требуя непрерывности  $\phi_0$  и ее производной  $\partial_\rho\phi_0$ .

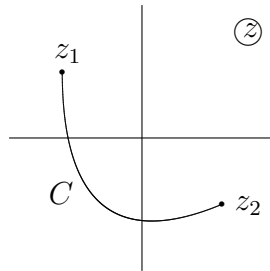
### А. Метод Лапласа для решения линейных дифференциальных уравнений второго порядка.

Рассмотрим дифференциальное уравнение вида

$$(a_2 + b_2x) \frac{d^2}{dx^2}\phi(x) + (a_1 + b_1x) \frac{d}{dx}\phi(x) + (a_0 + b_0x)\phi(x) = 0,$$

где  $a_0, a_1, a_2, b_0, b_1, b_2$  – суть комплексные, вообще говоря, числа.

Рассмотрим некоторый контур  $C$  на комплексной плоскости



и будем искать решение в виде

$$\phi(x) = \int_C dz u(z) e^{xz}.$$

$$x\phi = \int_C dz u(z) x e^{xz} = \int_C dz u(z) (e^{xz})' = e^{xz} u|_{z_1}^{z_2} - \int_C dz u'(z) e^{xz}$$

$$\phi' = \int_C dz zu(z) e^{xz}, \quad \phi'' = \int_C dz z^2 u(z) e^{xz}$$

$$x\phi' = \int_C dz zu(z) x e^{xz} = \int_C dz zu(z) (e^{xz})' = e^{xz} zu|_{z_1}^{z_2} - \int_C dz (zu(z))' e^{xz}$$

$$x\phi'' = \int_C dz z^2 u(z) x e^{xz} = \int_C dz z^2 u(z) (e^{xz})' = e^{xz} z^2 u|_{z_1}^{z_2} - \int_C dz (z^2 u(z))' e^{xz}$$

Уравнение записывается в виде

$$-\int_C dz e^{xz} [u'(z)(b_2 z^2 + b_1 z + b_0) - u(z)(a_2 z^2 + (a_1 - 2)z + (a_0 - b_1))] + e^{xz} u(z)(b_2 z^2 + b_1 z + b_0) \Big|_{z_1}^{z_2} = 0$$

Таким образом, возникают условия того, что  $\phi(x)$  – решение рассмотренного уравнения

$$u'(z)(b_2 z^2 + b_1 z + b_0) - u(z)(a_2 z^2 + (a_1 - 2)z + (a_0 - b_1)) = 0 \quad (7)$$

$$e^{xz} u(z)(b_2 z^2 + b_1 z + b_0) \Big|_{z_1}^{z_2} = 0 \quad (8)$$

Первое уравнение легко решается. Если выполнено второе условие и интеграл по контуру сходится и отличен от нуля, то найдено решение уравнения в интегральной форме.

### В. Функции Бесселя нулевого порядка.

В решаемой задаче

$$a_2 = 0, a_1 = 1, a_0 = 0, b_2 = 1, b_1 = 0, b_0 = A, \quad A = \begin{cases} 1 - \varepsilon \equiv \kappa^2, & u < u_0 \\ -\varepsilon \equiv -\varkappa^2, & u > u_0 \end{cases}.$$

Решение

$$u'(z)(z^2 + A) + u(z)z = 0, \quad u(z) = \frac{\text{const}}{\sqrt{z^2 + A}}, \quad e^{uz} \sqrt{z^2 + A} \Big|_{z_1}^{z_2} = 0;$$

$$\phi_0(u) = \int_C \frac{dz}{\sqrt{z^2 + A}} e^{uz}, \quad u > 0.$$

Выделяем листы аналитичности и определяем контуры, исходя из реальных задачи:

$$\begin{array}{ccc} u < u_0 & & u > u_0 \\ C: z = it + 0, -\kappa < t < \kappa. & & C: z = -t + i0, \varkappa < t < \infty. \\ \phi_0^<(u) = \int_{-\kappa}^{\kappa} \frac{dt e^{itu}}{\sqrt{\kappa^2 - t^2}} & \begin{array}{c} \text{Diagram showing a vertical contour } C \text{ in the complex plane. The contour is a red line segment on the imaginary axis from } z_1 = -i\kappa \text{ to } z_2 = i\kappa. \end{array} & \begin{array}{c} \text{Diagram showing a horizontal contour } C \text{ in the complex plane. The contour is a blue line segment on the real axis from } z_2 = -\infty \text{ to } z_1 = -\varkappa. \end{array} & \phi_0^>(u) = \int_{\varkappa}^{\infty} \frac{dt e^{-tu}}{\sqrt{t^2 - \varkappa^2}} \end{array}$$

Итак, в интервале  $0 < u < u_0$  решение имеет вид

$$\begin{aligned} \phi_0^<(u) &= \int_{-1}^1 \frac{dt e^{it\kappa}}{\sqrt{1-t^2}} = 2 \int_0^1 \frac{dt \cos(t\kappa)}{\sqrt{1-t^2}} = 2 \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(u\kappa)^{2k}}{(2k)!} \int_0^1 \frac{dt t^{2k}}{\sqrt{1-t^2}} = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(u\kappa)^{2k}}{(2k)!} \int_0^1 dt t^{k-1/2} (1-t)^{-1/2} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(u\kappa)^{2k}}{(2k)!} \frac{\Gamma(k+1/2)\Gamma(1/2)}{\Gamma(k+1)} = \\ &= \pi \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(u\kappa)^{2k}}{2^{2k}(k!)^2} = \pi \left[ 1 - \frac{1}{4}(\kappa u)^2 + O((\kappa u)^4) \right]. \end{aligned}$$

Убедимся в том, что выбранное решение в области  $u > u_0$  квадратично интегрируемо:

$$\begin{aligned}\phi_0^>(u) &= \int_1^\infty \frac{dt e^{-t\kappa u}}{\sqrt{t^2-1}} = e^{-u\kappa} \int_0^\infty \frac{dt e^{-t\kappa u}}{\sqrt{t(t+2)}} = \\ &= \frac{e^{-u\kappa}}{\sqrt{2u\kappa}} \int_0^\infty \frac{dt e^{-t}}{\sqrt{t}} \left(1 + \frac{t}{2u\kappa}\right)^{-1/2} = \frac{e^{-u\kappa}}{\sqrt{2u\kappa}} \sqrt{\pi} [1 + O((u\kappa)^{-1})].\end{aligned}$$

Для сшивки же нужно исследовать поведение этой функции при  $u \rightarrow 0$ :

$$\begin{aligned}\phi_0^>(u) &= \int_{u\kappa}^\infty \frac{dt e^{-t}}{\sqrt{t^2-(u\kappa)^2}} = \int_{u\kappa}^1 \frac{dt}{\sqrt{t^2-(u\kappa)^2}} + \int_{u\kappa}^1 \frac{dt (e^{-t}-1)}{\sqrt{t^2-(u\kappa)^2}} + \int_1^\infty \frac{dt e^{-t}}{\sqrt{t^2-(u\kappa)^2}} = \\ &= \int_1^{1/u\kappa} \frac{dt}{\sqrt{t^2-1}} + \int_0^1 \frac{dt (e^{-t}-1)}{t} + \int_1^\infty \frac{dt e^{-t}}{t} + o(1) = -\ln \frac{u\kappa}{2} + \int_0^\infty dt e^{-t} \ln t + o(1).\end{aligned}$$

Осталось понять, что постоянная

$$\int_0^\infty dt e^{-t} \ln t \equiv \gamma = \frac{d}{ds} \int_0^\infty dt e^{-t} t^{s-1} \Big|_{s=1} = \Gamma'(1) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n\right)$$

не простая, а постоянная Эйлера.

Сшиваем по непрерывности решения и их производные при  $u = u_0 \ll 1$

$$c_1 \phi_0^<(u_0) = c_2 \phi_0^>(u_0), \quad c_1 (\phi_0^<)'(u_0) = c_2 (\phi_0^>)'(u_0).$$

Условие существования нетривиального решения

$$\phi_0^<(u_0) (\phi_0^>)'(u_0) = \phi_0^>(u_0) (\phi_0^<)'(u_0), \quad \frac{1}{2} (\kappa u_0)^2 \ln \frac{2e^\gamma}{u_0 \kappa} = 1.$$

Так как  $\kappa^2 = 1 - \varepsilon$ ,  $\kappa^2 = \varepsilon$ , то это уравнение определяет значение энергии связанного состояния:

$$\varepsilon = \frac{4e^{2\gamma}}{u_0^2} e^{-4/u_0^2}, \quad u_0 \rightarrow 0, \quad E_0 = -\frac{2\hbar^2 e^{2\gamma}}{ma^2} \exp\left[-\frac{2\hbar^2}{ma^2 U_0}\right].$$

Это ответ.

## VI. Метод перевала

Изучим метод исследования асимптотик специальных функций на примере функции Эйри-Фока. Строгое определение понятия асимптотического разложения и математически корректная работа с этим понятием - курс С.Хорошкина.

### А. Функция Эйри-Фока

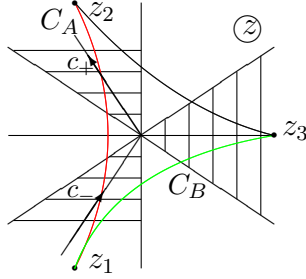
Рассмотрим уравнение

$$\frac{d^2}{dx^2}\phi(x) - x\phi(x) = 0.$$

Соответствующее уравнение на  $u(z)$  (см. предыдущий раздел)

$$u' + z^2u = 0, \quad u(z) = e^{-z^3/3}.$$

На комплексной плоскости выделим те сектора, в которых  $\exp[-z^3/3]$  стремится к нулю при стремлении  $z \rightarrow \infty$ .



$$\exp[xz - z^3/3] \Big|_{z_1 \rightarrow \infty}^{z_2 \rightarrow \infty} = 0$$

$$\phi(x) = \int_{C_A} dz \exp[xz - z^3/3]$$

Подынтегральное выражение имеет существенно особую точку на бесконечности. Отсюда следует, что, как и следовало ожидать, уравнение имеет два нетривиальных решения, отвечающих интегрированию по контурам  $C_A$  и  $C_B$ , например.

Если контур интегрирования  $C_A$  прижать к мнимой оси ( $z = it$ ,  $-\infty < t < \infty$ ), то для решения, отвечающему этому контуру, при подходящем выборе нормировки, получим условно сходящийся интеграл, известный в мире как функция Эйри-Фока

$$\phi(x) = \text{Ai}(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty dt \cos\left(xt + \frac{t^3}{3}\right) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_A} dz \exp\left[xz - \frac{z^3}{3}\right].$$

Найдем разложение функции  $\text{Ai}(x)$  в ряд в окрестности точки  $x = 0$ . Для этого деформируем контур  $C_A$  в контуры  $c_- : z = te^{-2i\pi/3}$ ,  $0 < t < \infty$ , и  $c_+ : z = te^{2i\pi/3}$ ,  $0 < t < \infty$ :

$$\begin{aligned} \text{Ai}(x) &= \frac{1}{2i\pi} \int_0^\infty dt e^{-t^3/3} \left[ e^{2i\pi/3} \exp[xte^{2i\pi/3}] - e^{-2i\pi/3} \exp[xte^{-2i\pi/3}] \right] = \\ &= \frac{1}{2i\pi} \sum_{k=0}^\infty \frac{x^k}{k!} \left[ e^{i(k+1)2\pi/3} - e^{-i(k+1)2\pi/3} \right] \int_0^\infty dt t^k e^{-t^3/3} = \\ &= \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^\infty \frac{x^k}{k!} 3^{\frac{k-3}{2}} \Gamma\left(\frac{k+1}{3}\right) \sin\left(\frac{2\pi}{3}(k+1)\right) \end{aligned}$$



Радиус сходимости этого ряда определяется ближайшей особенностью, которая расположена на бесконечности. Первые члены этого ряда

$$\text{Ai}(x) = \frac{1}{2\pi 3^{1/6}} \Gamma\left(\frac{1}{3}\right) - x \frac{3^{1/6}}{2\pi} \Gamma\left(\frac{2}{3}\right) + O(x^3), \quad x \rightarrow 0 \quad (9)$$

Исследуем поведение функции  $\text{Ai}(x)$  при  $x \rightarrow \pm\infty$ . Предварительные замены переменных.

$x > 0$ . Сделаем замену  $z \rightarrow \sqrt{x}z$

$$\text{Ai}(x) = \frac{\sqrt{x}}{2i\pi} \int_{C_A} dz \exp\left[x^{3/2}\left(z - \frac{z^3}{3}\right)\right]$$

$x < 0$ . Сделаем замену  $z \rightarrow \sqrt{-x}z$

$$\text{Ai}(x) = \frac{\sqrt{-x}}{2i\pi} \int_{C_A} dz \exp\left[-(-x)^{3/2}\left(z + \frac{z^3}{3}\right)\right]$$

Итак, нужно уметь находить асимптотики при  $\lambda \rightarrow +\infty$  интегралов вида

$$J(\lambda) = \int_C dz e^{\lambda f(z)}, \quad \lambda \rightarrow +\infty,$$

где  $C$  – кусочно гладкая кривая в комплексной плоскости  $z$ , функция  $f(z)$  регулярна в некоторой области, содержащей кривую  $C$ .

## В. Метод Лапласа

- Теорема 1. Пусть при  $a \leq x \leq b$

$$f(x) < f(a), \quad x \neq a, \quad f'(a) \neq 0,$$

и функции  $f(x), g(x)$  непрерывны при  $a \leq x \leq b$  и бесконечно дифференцируемы в окрестности точки  $x = a$ . Тогда при  $\lambda \rightarrow +\infty$  справедливо асимптотическое разложение

$$\int_a^b dx g(x) e^{\lambda f(x)} \sim e^{\lambda f(a)} \sum_{k=0} \frac{c_k}{\lambda^{k+1}}.$$

Это разложение можно почленно дифференцировать любое число раз.

Главный член асимптотики

$$\int_a^b dx g(x) e^{\lambda f(x)} = -\frac{1}{\lambda f'(a)} e^{\lambda f(a)} \left[ g(a) + O\left(\frac{1}{\lambda}\right) \right].$$

Набросок доказательства (интегрирование по частям)

$$\int_a^b dx g(x) e^{\lambda f(x)} = \int_a^b \frac{g(x)}{\lambda f'(x)} d e^{\lambda f(x)} =$$

$$\frac{g(b)}{\lambda f'(b)} e^{\lambda f(b)} - \frac{g(a)}{\lambda f'(a)} e^{\lambda f(a)} - \frac{1}{\lambda^2} \int_a^b \frac{1}{f'(x)} \frac{d}{dx} \left( \frac{g(x)}{f'(x)} \right) d e^{\lambda f(x)}$$

- Теорема 2. Пусть при  $a \leq x \leq b$

$$f(x) < f(x_0), \quad x \neq x_0, \quad a < x_0 < b, \quad f''(x_0) \neq 0,$$

и функции  $f(x), g(x)$  непрерывны при  $a \leq x \leq b$  и бесконечно дифференцируемы в окрестности точки  $x = x_0$ . Тогда при  $\lambda \rightarrow +\infty$  справедливо асимптотическое разложение

$$\int_a^b dx g(x) e^{\lambda f(x)} \sim e^{\lambda f(x_0)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_k}{\lambda^{k+1/2}}.$$

Это разложение можно почленно дифференцировать любое число раз.

Главный член асимптотики

$$\int_a^b dx g(x) e^{\lambda f(x)} = \sqrt{-\frac{2\pi}{\lambda f''(x_0)}} e^{\lambda f(x_0)} \left[ g(x_0) + O\left(\frac{1}{\lambda}\right) \right].$$

*Намек* доказательства (сведение интеграла к гауссову, все равенства, кроме последнего, условны)

$$\int_a^b dx g(x) e^{\lambda f(x)} =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} dx (g(x_0) + g'(x_0)(x - x_0) + \dots) \exp \left[ \lambda f(x_0) - \frac{1}{2} \lambda |f''(x_0)| (x - x_0)^2 + \dots \right] =$$

$$= e^{\lambda f(x_0)} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\lambda |f''(x_0)|}} \int_{-\infty}^{\infty} du (g(x_0) + g'(x_0)u) e^{-u^2} = g(x_0) e^{\lambda f(x_0)} \frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{\lambda |f''(x_0)|}}$$

Значения  $x$ , на которых набирается интеграл,

$$|x - x_0| \sim \frac{1}{\sqrt{\lambda |f''(x_0)|}},$$

поэтому поправки к полученной формуле (нечетные степени  $x - x_0$  при интегрировании зануляются)

$$g(x_0) + O\left(\frac{1}{\lambda}\right).$$

### С. Описание метода перевала

Метод перевала для вычисления асимптотики интеграла

$$J(\lambda) = \int_C dz e^{\lambda f(z)}, \quad \lambda \rightarrow +\infty,$$

где  $C$  – кусочно гладкая кривая в комплексной плоскости  $z$ , функция  $f(z)$  регулярна в некоторой области  $D$ , содержащей кривую  $C$ , основан на том, что контур интегрирования  $C$  можно, не изменив значение интеграла, деформировать в области  $D$  в контур  $C_{sp}$  такой, что

1.  $\max_{z \in C_{sp}} \Re f(z)$  достигается в одной внутренней точке контура  $z_0 \in C_{sp}$ ,
2.  $\Im f(z) \equiv \text{const}$  при  $z \in C_{sp}$  в окрестности точки  $z_0$ .

Пусть  $C_0$  – малая дуга кривой  $C_{sp}$ , содержащая точку  $z_0$ . Тогда  $\Re f(z) \leq \Re f(z_0) - \delta$ , где  $\delta > 0$ , при  $z \in C, z \notin C_0$  (первое условие). Поэтому интеграл по контуру  $C - C_0$  оценивается как  $O(|e^{\lambda(\Re f(z_0) - \delta)}|)$  (для бесконечного контура  $C_{sp}$  важно, чтобы интеграл  $J(\lambda)$  абсолютно сходиллся при некотором  $\lambda = \lambda_0 > 0$ ).

Теперь с интегралом по контуру  $C_0$ . Пусть  $z = \varphi(t)$ ,  $-t_0 \leq t \leq t_0$ ,  $\varphi(0) = z_0$ . В силу второго условия  $\Im f(z) = \Im f(z_0)$ , так что

$$J(\lambda) = e^{i\lambda \Im f(z_0)} \int_{-t_0}^{t_0} dt \varphi'(t) e^{\lambda \Re f(\varphi(t))},$$

причем при  $t = 0$  показатель экспоненты имеет единственный максимум на отрезке интегрирования. Дальше – теорема 2 из метода Лапласа (см. предыдущий раздел).

В каких же точках  $z_0$  выполняются условия 1 и 2? Первое:

$$\left. \frac{d}{dt} \Im f(z) \right|_{t=0} = 0$$

в силу условия 2. Так как  $\max_{z \in C_{sp}} \Re f(z)$  достигается в точке регулярности функции  $f(z)$ , то и второе:

$$\left. \frac{d}{dt} \Re f(z) \right|_{t=0} = 0.$$

Отсюда следует условие на точку  $z_0$  (называется *точкой перевала*)

$$f'(z_0) = 0.$$

Таким образом, контур, удовлетворяющий поставленным условиям, *обязан* проходить через точку перевала функции  $f(z)$ .

Структура линий уровня регулярных функций.

- Лемма 1. Пусть  $f'(z_0) \neq 0$ . Тогда в малой окрестности точки  $z_0$  линии уровня  $\Re f(z) = \text{const}$ ,  $\Im f(z) = \text{const}$  представляют собой гладкие кривые.
- Лемма 2. Пусть  $z_0$  – простая точка перевала функции  $f(z)$ , то есть  $f'(z_0) = 0$ ,  $f''(z_0) \neq 0$ . Тогда в малой окрестности точки  $z_0$  линия уровня  $\Re f(z) = \Re f(z_0)$  состоит из двух гладких кривых  $l_1, l_2$ , которые ортогональны в точке  $z_0$  и разбивают окрестность на четыре сектора. Знаки функции  $\Re(f(z) - f(z_0))$  в соседних секторах различны.

Причем, через секторы, в которых  $\Re f(z) < \Re f(z_0)$ , проходит гладкая кривая  $l$  (линия наибыстрейшего спуска), такая, что  $\Im f(z) = \Im f(z_0)$  при  $z \in l$ . Функция  $\Re f(z)$  строго монотонно убывает вдоль  $l$  при удалении  $z$  от точки  $z_0$ .

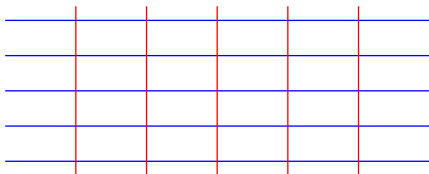


Рис. 1: Структура линий уровня  $\Re z = \text{const}$  (красный),  $\Im z = \text{const}$  (синий)

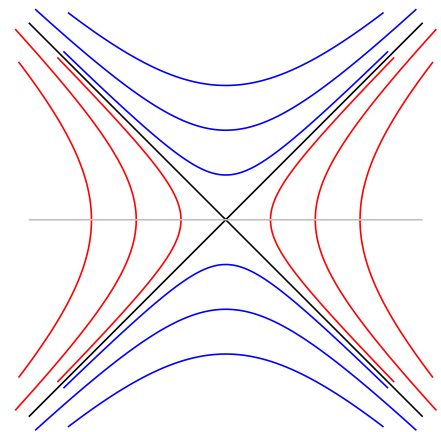


Рис. 2: Структура линий уровня  $\Re(-z^2) = \text{const}$

Доказательство этих лемм состоит в доказательстве существования взаимно однозначного отображения, переводящего структуру уровней из условий лемм 1 и 2 в структуру уровней для функции  $f(z) = z$  для леммы 1 и для функции  $f(z) = -z^2$  для леммы 2, соответственно.

Пусть  $U$  – достаточно малая окрестность точки  $z_0$ . Тогда существует функция  $\varphi(\zeta)$ , регулярная в окрестности точки  $\zeta = 0$  и такая, что  $f(\varphi(\zeta)) = f(z_0) - \zeta^2$  в этой окрестности; кроме того  $\varphi'(0) \neq 0$ .

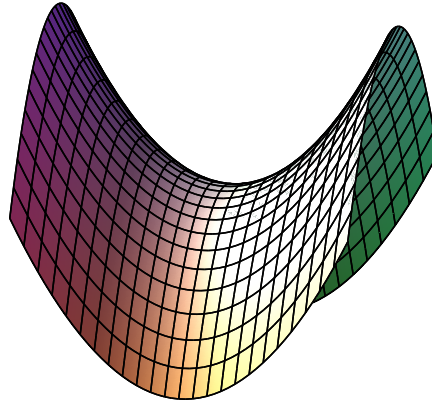


Рис. 3: поверхность  $\Re(-z^2) = y^2 - x^2$

Исследуем линии уровня действительной части функции  $f(z) = -z^2$ . Точка перевала  $z_0 = 0$ . Пусть  $z = x + iy$ . Семейство искомых линий уровня

$$\Re(-z^2) = -x^2 + y^2 = \text{const}.$$

Если  $\text{const} \neq 0$ , то эти кривые – гиперболы. Линии уровня  $\Re f(z) = \Re f(z_0)$  – прямые  $x = y, x = -y$  делят плоскость на четыре сектора. Знаки  $\Re f(z) - \Re f(z_0)$  в соседних секторах различны: красным обозначены те линии уровня, для которых  $\Re f(z) < \Re f(z_0)$ , а синим те гиперболы, для которых  $\Re f(z) > \Re f(z_0)$ . Через точку перевала проходит линия уровня мнимой части функции  $\Im f(z) = \Im f(z_0)$ , а именно прямая  $y = 0$ . Вдоль этой линии  $\Re f(z) = -x^2$ , то есть функция  $\Re f(z)$  строго монотонно убывает при удалении от точки перевала (линия наибо́льшего спуска – серая).

#### Д. Функция Эйри-Фока (продолжение)

$$\underline{x > 0, \quad x \rightarrow \infty}$$

В этом случае  $\lambda = x^{3/2}$ ,  $f(z) = z - \frac{z^3}{3}$ . Точки перевала

$$f'(z) = 1 - z^2 = 0, \quad z_{01} = -1, \quad z_{02} = 1.$$

Действительная и мнимая части исследуемой функции

$$\Re f(z) = x \left( 1 + y^2 - \frac{x^2}{3} \right), \quad \Im f(z) = y \left( 1 - x^2 + \frac{y^2}{3} \right), \quad \Re f(\pm 1) = \pm \frac{2}{3}, \quad \Im f(\pm 1) = 0.$$

Линии наискорейшего спуска - синие и области, где  $\Re f(z) \leq \Re f(z_0)$  - зеленые. Очевид-

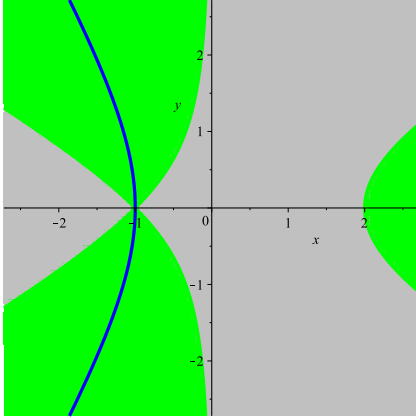


Рис. 4:  $z_0 = -1$

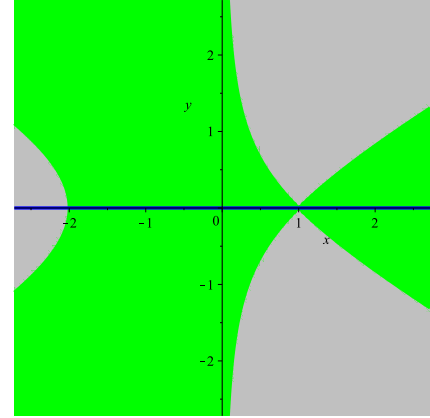


Рис. 5:  $z_0 = 1$

но, что для исследования асимптотики функции  $\text{Ai}(x)$  при  $x \rightarrow +\infty$  следует в качестве контура  $C_A$  выбрать линию наискорейшего спуска, проходящую через точку перевала  $z_0 = -1$ . Ее уравнение

$$x = -\sqrt{1 + \frac{y^2}{3}}, \quad -\infty < y < \infty.$$

В малой окрестности точки перевала на линии наискорейшего спуска

$$\Im f(z) = 0, \quad \Re f(z) = -\frac{2}{3} - y^2 + O(y^4), \quad dz = (i + O(y))dy,$$

поэтому

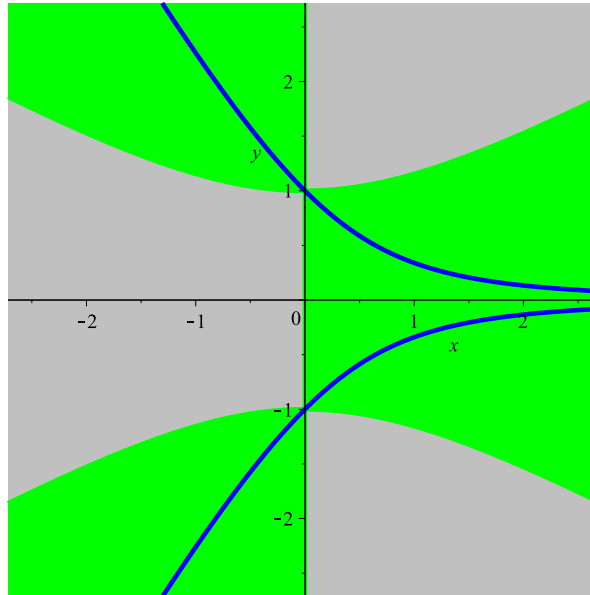
$$\text{Ai}(x) = \frac{\sqrt{x}}{2\pi i} e^{-\frac{2}{3}x^{3/2}} i \int dy e^{-x^{3/2}y^2} = \frac{1}{2\sqrt{\pi\sqrt{x}}} e^{-\frac{2}{3}x^{3/2}} (1 + O(x^{-3/2})).$$

$$\text{Ai}(x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\sqrt{x}}} e^{-\frac{2}{3}x^{3/2}} (1 + O(x^{-3/2})), \quad x \rightarrow +\infty \quad (10)$$

$$\underline{x < 0, \quad |x| \rightarrow \infty}$$

В этом случае  $\lambda = |x|^{3/2}$ ,  $f(z) = -z - \frac{z^3}{3}$ . Точки перевала

$$f'(z) = 1 + z^2 = 0, \quad z_0 = \pm i.$$

Рис. 6:  $z_0 = \pm i$ 

Действительная и мнимая части исследуемой функции

$$\Re f(z) = x\left(y^2 - 1 - \frac{x^2}{3}\right), \quad \Im f(z) = y\left(\frac{y^2}{3} - 1 - x^2\right), \quad \Re f(\pm i) = 0, \quad \Im f(\pm i) = \mp \frac{2}{3}.$$

Линии наискорейшего спуска - синие. Области комплексной плоскости, где  $\Re f(z) \leq \Re f(z_0)$  - зеленые.

Очевидно, что для исследования асимптотики функции  $\text{Ai}(x)$  при  $x \rightarrow -\infty$  следует в качестве контура  $C_A$  выбрать две линии наискорейшего спуска, проходящих через точки перевала  $z_0 = \pm i$  (составить контур интегрирования как суперпозицию двух линий наискорейшего спуска):

$$x = \begin{cases} -\sqrt{\frac{y^2}{3} - 1 - \frac{2}{3y}}, & y < -1 \\ \sqrt{\frac{y^2}{3} - 1 - \frac{2}{3y}}, & -1 \leq y < 0 \\ \sqrt{\frac{y^2}{3} - 1 + \frac{2}{3y}}, & 0 < y \leq 1 \\ -\sqrt{\frac{y^2}{3} - 1 + \frac{2}{3y}}, & y > 1 \end{cases}.$$

Вблизи точек перевала  $z_0 = \pm i$  на линии наискорейшего спуска

$$y = \pm 1 + \eta, \quad x = \mp \eta + \frac{1}{3}\eta^2 + O(\eta^3), \quad \Re f(z_0) = -2\eta^2 + O(\eta^3).$$

Теперь остается найти асимптотику

$$\text{Ai}(x) = \frac{\sqrt{|x|}}{2\pi i} \left[ e^{\frac{2}{3}i\lambda}(1+i) + e^{-\frac{2}{3}i\lambda}(-1+i) \right] \int d\eta e^{-2\lambda\eta^2} = \sin\left(\frac{2}{3}\lambda + \frac{\pi}{4}\right) \frac{\sqrt{|x|}}{\sqrt{\pi\lambda}}$$

$$\text{Ai}(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi\sqrt{|x|}}} \left[ \sin\left(\frac{2}{3}|x|^{3/2} + \frac{\pi}{4}\right) + O(|x|^{-3/2}) \right], \quad x \rightarrow -\infty \quad (11)$$

### Е. Визуализация результатов

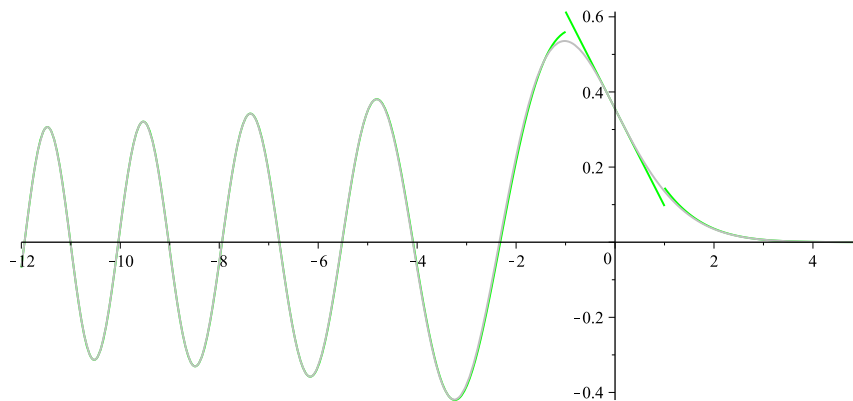


Рис. 7: результат расчетов – зеленый, серый – Марле'овский график  $\text{Ai}(x)$

## VII. Квазиклассическое приближение в квантовой механике

Рассмотрим задачу о нахождении спектра гамильтониана (связанных состояний) нерелятивистской частицы в одномерном потенциале  $U(x) = U_0 u(x/a)$  в координатном представлении

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\phi_n''(x) + U_0 u(x/a)\phi_n(x) = E_n \phi_n(x).$$

Обезразмерим:  $y = \frac{x}{a}$ ,  $\zeta^2 = \frac{\hbar^2}{2ma^2U_0}$ ,  $p_n^2(y) = \frac{E_n - U(y)}{U_0}$ ,

$$\zeta^2 \phi_n''(y) + p_n^2(y)\phi_n(y) = 0.$$

Ищем решение в виде

$$\phi_n = \exp\left[\frac{i}{\zeta} \int_{y_0}^y dz s_n(z)\right].$$



В таком случае (уравнение Риккати)

$$i\zeta s'_n(y) - s_n^2(y) + p_n^2(y) = 0.$$

В пределе  $\zeta \rightarrow 0$  (*квазиклассический предел*) решаем уравнение в виде ряда (в ситуации общего положения - асимптотического, для интегрируемых систем - настоящего) последовательных приближений по параметру  $\zeta$

$$s_n(y) = \sum_{k=0} \zeta^k s_n^{(k)}(y).$$

В нулевом порядке  $s_n^{(0)}(y) = \pm p_n(y)$ , в первом порядке

$$ip'_n(y) - 2p_n(y)(s_n^{(1)}(y))' = 0, \quad s_n^{(1)}(y) = i(\ln \sqrt{|p_n(y)|})'.$$

Интересно проанализировать структуру всего ряда, но для иллюстрации метода вполне достаточно вычисленного.

Таким образом, решение уравнения на собственные значения гамильтониана связанных состояний ( $\epsilon_n = E_n/U_0$ ) в области классического финитного движения:

$$\phi_n(y) = \frac{A}{(\epsilon_n - u(z))^{1/4}} \cos \left[ \frac{1}{\zeta} \int_{y_0}^y dz \sqrt{\epsilon_n - u(z)} + \alpha \right],$$

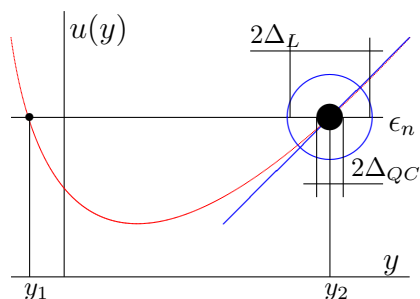
а в классически недоступных областях

$$\phi_n(y) = \frac{B}{(u(z) - \epsilon_n)^{1/4}} \exp \left[ \mp \frac{1}{\zeta} \int_{y_0}^y dz \sqrt{u(z) - \epsilon_n} \right],$$

где знак показателя экспоненты определяется принадлежностью решения пространству  $L_2$ .

Чтобы заявленное разложение было асимптотическим нужно, чтобы выполнялось соотношение

$$\left| \frac{p'}{p^2} \right| = \frac{1}{2} \frac{|u'(y)|}{|\epsilon_n - u(y)|^{3/2}} < \frac{1}{2} C, \quad C - \text{ограниченная постоянная.} \quad (12)$$



Область нарушения квазиклассического приближения:  $|y - y_0| < \Delta_{QC}$ .

Область справедливости линейного приближения:  $|y - y_0| < \Delta_L$ .

Это соотношение заведомо нарушается в окрестностях точек  $y_0$  таких, что  $u(y_0) = \epsilon_n$ . Эти точки соответствуют точкам поворота классического финитного движения. Предположим, что эти окрестности лежат в областях действительной оси, в которых можно ограничиться линейным членом разложения потенциальной энергии вблизи точки поворота. Представим потенциальную энергию следующим образом

$$u(y) = u(y_0) + (y - y_0)u'(y_0) + \frac{1}{2}(y - y_0)^2 u''(y_0 + \theta(y - y_0)).$$

Линейное приближение справедливо, если

$$\frac{1}{2}|y - y_0| \frac{|u''(y_0)|}{|u'(y_0)|} = \frac{1}{2}\delta \rightarrow 0.$$

Отсюда находим область линейного приближения

$$|y - y_0| < \delta \frac{|u'(y_0)|}{|u''(y_0)|}$$

В линейном приближении область выполнения квазиклассического приближения (см. (12)) определяется из соотношения  $|y - y_0| > C^{-2/3}|u'(y_0)|^{-1/3}$  и условие пересечения этой области с областью линейного приближения сводится к требованию на потенциальную энергию

$$\frac{|u''(y_0)|}{|u'(y_0)|^{4/3}} < C^{2/3}\delta \ll 1.$$

Об этом говорят, как об условии *плавности* изменения потенциала.

В области линейного приближения вблизи точки поворота  $y_0$  квазиклассические решения можно записать следующим образом

$$\begin{aligned} \phi_n(y) &= \frac{A_0}{|u'(y_0)\delta y_0|^{1/4}} \cos\left[\frac{2|u'(y_0)|^{1/2}}{3\zeta}(\delta y_0)^{3/2} + \alpha_0\right], \\ \phi_n(y) &= \frac{B_0}{|u'(y_0)\delta y_0|^{1/4}} \exp\left[-\frac{2|u'(y_0)|^{1/2}}{3\zeta}|\delta y_0|^{3/2}\right], \quad \delta y_0 = y - y_0. \end{aligned}$$

С другой стороны, на *всем* интервале линейного приближения поставленная задача

$$\zeta^2 \phi_n'' + (\epsilon_n - u(y))\phi_n = \frac{d^2 \phi_n}{d\delta y_0^2} - \frac{u'(y_0)}{\zeta^2} \delta y_0 \phi_n = 0$$

допускает точное решение, которое в рассматриваемой ситуации имеет вид

$$\phi_n(y) = \text{Ai}\left[\text{sgn}u'(y_0) \frac{|u'(y_0)|^{1/3}}{\zeta^{2/3}} \delta y_0\right].$$

Сравнение этого решения с квазиклассическим корректно при  $|\delta y_0| > C^{-2/3}|u'(y_0)|^{-1/3}$  или при значении аргумента функции Эйри-Фока большим, чем  $(C\zeta)^{-2/3}$ . Это отвечает

асимптотике этой функции, которая получена ранее. Поэтому квазиклассическое решение в классически доступной области, полученное сшивкой в точке поворота  $y_1$  имеет вид

$$\phi_n(y) = \frac{A_1}{(\epsilon_n - u(z))^{1/4}} \sin \left[ \frac{1}{\zeta} \int_{y_1}^y dz \sqrt{\epsilon_n - u(z)} + \frac{\pi}{4} \right],$$

а в точке поворота  $y_2$  -

$$\phi_n(y) = \frac{A_2}{(\epsilon_n - u(z))^{1/4}} \sin \left[ \frac{1}{\zeta} \int_y^{y_2} dz \sqrt{\epsilon_n - u(z)} + \frac{\pi}{4} \right].$$

Это одно и то же решение, если

$$\frac{1}{\pi} \int_{y_1}^{y_2} dz \sqrt{\epsilon_n - u(z)} = n + \frac{1}{2}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

В миру это условие известно как правило квазиклассического квантования Бора-Зоммерфельда.

### VIII. Решение уравнений Максвелла

Задача: по заданным распределениям плотности заряда  $\rho(t, \vec{x})$  и тока  $\vec{j}(t, \vec{x})$  найти электромагнитные поля  $\vec{E}(t, \vec{x})$  и  $\vec{B}(t, \vec{x})$ , то есть решить уравнения Максвелла

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0 \text{ (нет магнитных монополей)}, \quad \operatorname{rot} \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0 \text{ (Фарадей)}, \quad (13)$$

$$\operatorname{div} \vec{E} = \rho \text{ (Кулон)}, \quad \operatorname{rot} \vec{B} - \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \vec{j} \text{ (Максвелл)}. \quad (14)$$

Уравнения (13) можно удовлетворить, если ввести скалярный  $\phi(t, \vec{x})$  и векторный  $\vec{A}(t, \vec{x})$  потенциалы

$$\vec{B} = \operatorname{rot} \vec{A}, \quad \vec{E} = -\vec{\nabla} \phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}.$$

Введенные таким образом потенциалы определены не однозначно (есть калибровочный произвол). Действительно, если рассмотреть потенциалы

$$\vec{A} + \vec{\nabla} f, \quad \phi - \frac{\partial f}{\partial t}, \quad f(t, \vec{x}) - \text{некоторая функция,}$$

то построенные по этим потенциалам электромагнитные поля не будут отличаться от определенных ранее. Поэтому на потенциалы можно наложить какое-либо условие,

фиксирующее этот произвол. Выбор этого *калибровочного условия* не тривиальная задача, особенно в квантовой теории. В электродинамике физическое содержание теории раскрывает так называемая кулоновская калибровка

$$\operatorname{div}\vec{A} = 0.$$

В этом случае первое уравнение (14) принимает вид уже решенной кулоновской задачи

$$\vec{\nabla}^2\phi = -\varrho, \quad \phi(t, \vec{x}) = \frac{1}{4\pi} \int \frac{d\vec{y}}{|\vec{x} - \vec{y}|} \varrho(t, \vec{y}).$$

Второе уравнение (14) сводится к следующему

$$\frac{\partial \vec{A}(t, \vec{x})}{\partial t^2} - \vec{\nabla}^2 \vec{A}(t, \vec{x}) = \vec{j}(t, \vec{x}) - \vec{\nabla} \frac{1}{4\pi} \int \frac{d\vec{y}}{|\vec{x} - \vec{y}|} \frac{\partial \varrho(t, \vec{y})}{\partial t}.$$

Если воспользоваться законом сохранения заряда  $\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \operatorname{div}\vec{j} = 0$ , это уравнение записывается вот так

$$\frac{\partial \vec{A}}{\partial t^2} - \vec{\nabla}^2 \vec{A} = \vec{j}_{\text{tr}}, \quad j_{\text{tr}}^i(t, \vec{x}) = j^i(t, \vec{x}) - \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_k} \frac{1}{4\pi} \int \frac{d\vec{y}}{|\vec{x} - \vec{y}|} j^k(t, \vec{y}).$$

Здесь определена так называемая поперечная плотность тока  $\vec{j}_{\text{tr}}$ , для которой  $\operatorname{div}\vec{j}_{\text{tr}} = 0$ .

Таким образом, задача о решении уравнений Максвелла сводится к решению *волнового уравнения*

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t^2} - \vec{\nabla}^2 \varphi = j,$$

спросить Сашу Д.

## IX. Аналитические свойства функций Грина

Рассмотрим уравнение, определяющее вещественное массивное скалярное поле  $\phi(t, \vec{x}) = \phi(t; x_1, \dots, x_n)$  вида

$$(\partial_t^2 - (\partial_{x_1}^2 + \dots + \partial_{x_n}^2) + m^2)\phi(t, \vec{x}) = j(t, \vec{x}), \quad (15)$$

где  $m$  - положительный параметр (масса скалярного поля),  $j(t, \vec{x})$  - заданная функция времени  $t$  и координат  $x_1, \dots, x_n$  (внешний источник).

Решение этого линейного по полю  $\phi(t, \vec{x})$  уравнения можно записать в виде

$$\phi(t, \vec{x}) = \phi^0(t, \vec{x}) + \int d\tau \int dy_1 \dots dy_n \mathcal{E}(t, \tau; \vec{x}, \vec{y}) j(\tau, \vec{y}),$$

здесь  $\phi^0(t, \vec{x})$  - решение уравнения (15) с правой частью, равной нулю,  $\mathcal{E}(t, \tau; \vec{x}, \vec{y})$  - фундаментальное решение уравнения

$$(\partial_t^2 - (\partial_{x_1}^2 + \dots + \partial_{x_n}^2) + m^2)\mathcal{E}(t, \tau; \vec{x}, \vec{y}) = \delta(t - \tau)\delta(x_1 - y_1) \dots \delta(x_n - y_n).$$

Если на поставленную задачу наложить специальные условия, фиксирующие произвол, связанный с выбором решения однородного уравнения, то решение можно представить в виде

$$\phi(t, \vec{x}) = \int d\tau \int dy_1 \dots dy_n \mathcal{D}(t, \tau; \vec{x}, \vec{y}) j(\tau, \vec{y}),$$

где  $\mathcal{D}(t, \tau; \vec{x}, \vec{y})$  - функция Грина рассмотренного уравнения с условиями, фиксирующими произвол.

Само рассмотренное уравнение инвариантно относительно однородного сдвига по времени и пространству, если этой же инвариантностью обладают наложенные условия, то (подумайте как доказать)

$$\mathcal{D}(t, \tau; \vec{x}, \vec{y}) = \mathcal{D}(t - \tau, \vec{x} - \vec{y}).$$

В этом случае нужно решать более простое уравнение

$$(\partial_t^2 - (\partial_{x_1}^2 + \dots + \partial_{x_n}^2) + m^2)\mathcal{D}(t, \vec{x}) = \delta(t)\delta(x_1) \dots \delta(x_n).$$

Решим это уравнение методом преобразования Фурье. Ищем решение в виде

$$\mathcal{D}(t, \vec{x}) = \int \frac{d\omega}{2\pi} \int \frac{dk_1 \dots dk_n}{(2\pi)^n} \mathcal{D}_F(\omega, k_1, \dots, k_n) e^{-i\omega t + ik_1 x_1 + \dots + ik_n x_n}.$$

Для  $\mathcal{D}_F(\omega; \vec{k})$  получаем алгебраическое уравнение, которое следует решать в  $\mathcal{S}'$

$$(\omega - \epsilon_k)(\omega + \epsilon_k)\mathcal{D}(\omega; k_1, \dots, k_n) = -1, \quad \epsilon_k = \sqrt{m^2 + k^2},$$

где  $k^2 = k_1^2 + \dots + k_n^2$ .

Решение этого уравнения в  $\mathcal{S}'$

$$\mathcal{D}_F(\omega, \vec{k}) = \frac{1}{2\epsilon_k} \text{P} \frac{1}{\omega + \epsilon_k} - \frac{1}{2\epsilon_k} \text{P} \frac{1}{\omega - \epsilon_k} + C_1(k)\delta(\omega - \epsilon_k) + C_2(k)\delta(\omega + \epsilon_k).$$

Представим обобщенные функции, фигурирующие в ответе, в виде пределов функций, которые аналитические либо в верхней, либо в нижней полуплоскостях комплексной переменной  $\omega$

$$\text{P} \frac{1}{x} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{x + i0} + \frac{1}{x - i0} \right), \quad \delta(x) = \frac{1}{2i\pi} \left( \frac{1}{x - i0} - \frac{1}{x + i0} \right).$$

Теперь ответ для фурье-образа функции Грина можно представить в виде

$$\mathcal{D}_F(\omega, \vec{k}) = \frac{1}{\omega - \epsilon_k + i0} \left[ -\frac{1}{4\epsilon_k} - \frac{C_1(k)}{2i\pi} \right] + \frac{1}{\omega - \epsilon_k - i0} \left[ -\frac{1}{4\epsilon_k} + \frac{C_1(k)}{2i\pi} \right] + \frac{1}{\omega + \epsilon_k + i0} \left[ \frac{1}{4\epsilon_k} - \frac{C_2(k)}{2i\pi} \right] + \frac{1}{\omega + \epsilon_k - i0} \left[ \frac{1}{4\epsilon_k} + \frac{C_2(k)}{2i\pi} \right].$$

#### А. Запаздывающая функция Грина

Функция Грина называется запаздывающей, если значение поля  $\phi(t, \vec{x})$  в момент времени  $t$  определяется значениями источника  $j(\tau, \vec{y})$  только в моменты времени  $\tau$ , предшествующие времени  $t$  (принцип причинности). Это означает, что

$$\mathcal{D}^R(t, \tau; \vec{x}, \vec{y}) = 0 \quad \text{при} \quad \tau > t.$$

Это условие инвариантно относительно сдвигов по времени, поэтому для рассматриваемого уравнения

$$\mathcal{D}^R(t, \vec{x}) = 0 \quad \text{при} \quad t < 0.$$

Рассмотрим фурье-образ запаздывающей функции Грина

$$\mathcal{D}_F^R(\omega, \vec{k}) = \int dt \int dx_1 \dots dx_n \mathcal{D}^R(t, \vec{x}) e^{i\omega t - ik_1 x_1 - \dots - ik_n x_n} = \int_0^\infty dt \int dx_1 \dots dx_n \mathcal{D}^R(t, \vec{x}) e^{i\omega t - ik_1 x_1 - \dots - ik_n x_n}.$$

Посмотрим на фурье-образ функции Грина как на функцию комплексной частоты  $\omega = \omega_1 + i\omega_2$ . Из приведенного выражения видно, что при  $\omega_2 > 0$  интеграл по времени сходится и, следовательно,  $\mathcal{D}_F^R(\omega, \vec{k})$  - аналитична в верхней полуплоскости частоты, как функции комплексной переменной.

Отсюда сразу же следует, что в общей формуле для фурье-образа функции Грина следует занулить второй и четвертый члены:

$$C_1(k) = \frac{i\pi}{2\epsilon_k}, \quad C_2(k) = -\frac{i\pi}{2\epsilon_k}.$$

И, следовательно,

$$\mathcal{D}_F^R(\omega, \vec{k}) = -\frac{1}{(\omega + i0)^2 - \epsilon_k^2}.$$

## В. Опережающая функция Грина

Функция Грина называется опережающей, если значение поля  $\phi(t, \vec{x})$  в момент времени  $t$  определяется значениями источника  $j(\tau, \vec{y})$  только в моменты времени  $\tau$ , последующими за временем  $t$ . Это означает, что

$$\mathcal{D}^A(t, \tau; \vec{x}, \vec{y}) = 0 \quad \text{при} \quad \tau < t.$$

Повторяя рассуждения, аналогичные проведенным для запаздывающей функции Грина, убеждаемся, что *опережающая функция Грина аналитична в нижней полуплоскости комплексной частоты*. В этом случае

$$C_1(k) = -\frac{i\pi}{2\epsilon_k}, \quad C_2(k) = \frac{i\pi}{2\epsilon_k},$$

и, таким образом,

$$\mathcal{D}_F^A(\omega, \vec{k}) = -\frac{1}{(\omega - i0)^2 - \epsilon_k^2}.$$

## С. Причинная функция Грина

Определим причинную (или фейнмановскую) функцию Грина через аналитические свойства ее фурье-образа по частоте. Пусть для причинной функции Грина полюс с положительной действительной частью лежит в нижней полуплоскости комплексной частоты (как для запаздывающей функции Грина), а полюс с отрицательной действительной частью - в верхней полуплоскости комплексной частоты (как для опережающей функции Грина).

Это означает, что

$$C_1(k) = C_2(k) = \frac{i\pi}{2\epsilon_k},$$

и, окончательно,

$$\mathcal{D}_F^F(\omega, \vec{k}) = -\frac{1}{\omega^2 - \epsilon_k^2 + i0}.$$

## Х. Задачи

### 1. Уравнение Бесселя

$$x^2 \phi_n''(x) + x \phi_n'(x) + (x^2 - n^2) \phi_n(x) = 0, \quad n = 0, 1, \dots, \quad 0 < x < \infty.$$

Привести это уравнение к виду, пригодному для решения его методом Лапласа. Найти интегральное представление решения и выбрать такой контур интегрирования, который дает регулярное в точке  $x = 0$  решение. Получить разложение в ряд в окрестности этой точки, определить радиус сходимости этого ряда. Используя интегральное представление найти рекуррентные соотношения между  $\phi_{n+1}, \phi_n, \phi_{n-1}$  и  $\phi_n, \phi_{n-1}, \phi'_n$ . Сравнить полученные результаты со свойствами функции, известной в миру как *функция Бесселя*  $J_n(x)$ .

2. Исследовать вопрос о существовании связанного состояния в мелкой трехмерной яме

$$U(x_1, x_2, x_3) = \begin{cases} -U_0, & \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} < a \\ 0, & \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} > a \end{cases}.$$

3. Вычислить с относительной погрешностью не более 5%

$$\int_1^{10} dx x^x.$$

4. Найти асимптотику  $\Gamma(x)$ -функции при  $x \rightarrow +\infty$ .

5. Функция Эйри-Фока - решение уравнения

$$\text{Ai}''(x) - x\text{Ai}(x) = 0, \quad -\infty < x < \infty.$$

Найти второе линейно независимое *действительное* решение этого уравнения. Исследовать его свойства.

6. Двумерное волновое уравнение. Решить задачу Коши для уравнения

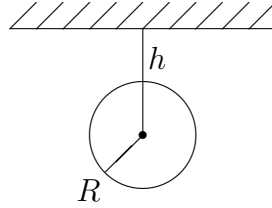
$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \right), \quad u = u(t, x_1, x_2)$$

с начальными условиями

$$u(0, x_1, x_2) = f(x_1, x_2), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(0, x_1, x_2) = g(x_1, x_2).$$

7. Длинная (очень) труба радиуса  $R$  закопана на глубину  $h$  от поверхности земли и поддерживается при постоянной температуре  $T_0$ . Построить уровни постоянной температуры в земле, если температура на поверхности земли постоянна.





8. Построить на плоскости  $(x, y)$  кривую, заданную параметрически

$$x = 2t - 4t^3, \quad y = t^2 - 3t^4.$$

9. Вычислить

$$\int dx_1 \dots dx_N \exp \left[ - \sum_{1 \leq i \leq j \leq N} x_i x_j \right].$$

10. Определить форму прогиба стержня  $h(x)$  длины  $l$  с заделанными концами под влиянием собственного веса, если его свободная энергия имеет вид

$$F = \int_0^l dx \left[ \frac{E I}{2} (h''(x))^2 - \rho g h(x) \right],$$

здесь  $E$ -модуль Юнга стержня,  $I$ -его момент инерции,  $\rho$ -масса единицы длины стержня,  $g$ -ускорение свободного падения.

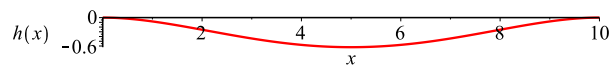


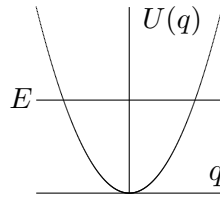
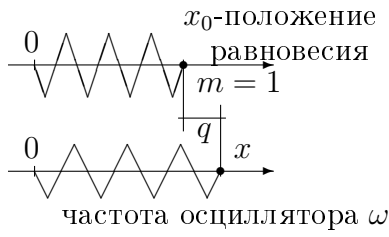
Рис. 8: Прогиб стержня с заделанными концами

11. Рассмотрим уравнение

$$\phi''(x) - 2x\phi'(x) + 2n\phi(x) = 0, \quad -\infty < x < \infty.$$

При каких значениях параметра  $n$  существует нетривиальное решение этого уравнения, которое при  $x \rightarrow \pm\infty$  стремится к бесконечности не быстрее конечной степени  $x$ .

## XI. Q-гармонический осциллятор



$$H(q, p) = \frac{1}{2}p^2 + \frac{1}{2}\omega^2 q^2$$

квантование

$$\hat{H} = \frac{1}{2m}\hat{p}^2 + \frac{1}{2}m\omega^2\hat{q}^2, \quad [\hat{q}, \hat{p}] = i\hbar I$$

Решим главную задачу квантовой механики

$$\hat{H}|\phi_n\rangle = E_n|\phi_n\rangle.$$

Введем операторы уничтожения и рождения

$$\hat{a} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\sqrt{2\hbar\omega}}(\hat{p} - i\omega\hat{q}), \quad \hat{a}^+ \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\sqrt{2\hbar\omega}}(\hat{p} + i\omega\hat{q}).$$

Найдем коммутационные соотношения между этими операторами

$$[\hat{a}, \hat{a}^+] = \frac{1}{2\hbar\omega}(-i\omega[\hat{q}, \hat{p}] + i\omega[\hat{p}, \hat{q}]) = -i\frac{1}{\hbar}[\hat{q}, \hat{p}] = I.$$

Выразим операторы координаты, импульса через операторы рождения и уничтожения

$$\hat{q} = i\sqrt{\frac{\hbar}{2\omega}}(\hat{a} - \hat{a}^+), \quad \hat{p} = \sqrt{\frac{\hbar\omega}{2}}(\hat{a} + \hat{a}^+),$$

и гамильтониан

$$\hat{H} = \frac{1}{2}\hbar\omega(\hat{a}^+\hat{a} + \hat{a}\hat{a}^+) = \hbar\omega\left[\hat{a}^+\hat{a} + \frac{1}{2}\right].$$

Первоначальную задачу перепишем в виде

$$\begin{aligned} \hbar\omega\left[\hat{a}^+\hat{a} + \frac{1}{2}\right]|\phi_n\rangle &= E_n|\phi_n\rangle \quad \Rightarrow \\ \hat{a}^+\hat{a}|\phi_n\rangle &= \left(\frac{E_n}{\hbar\omega} - \frac{1}{2}\right)|\phi_n\rangle = \lambda_n|\phi_n\rangle, \quad E_n = \hbar\omega\left(\lambda_n + \frac{1}{2}\right). \end{aligned}$$

Докажем несколько утверждений.

1. Собственное значение  $\lambda_n$  не отрицательно.

$$\begin{aligned} \lambda_n &= \langle\phi_n|\lambda_n|\phi_n\rangle = \langle\phi_n|\hat{a}^+\hat{a}|\phi_n\rangle = (\langle X| = \hat{a}|\phi_n\rangle) = \langle\phi_n|\hat{a}^+|X\rangle = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\hbar\omega}}\langle\phi_n|\hat{p} + i\omega\hat{q}|X\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\hbar\omega}}(\overline{\langle X|\hat{p}|\phi_n\rangle} + i\omega\overline{\langle X|\hat{q}|\phi_n\rangle}) = \frac{1}{\sqrt{2\hbar\omega}}\overline{\langle X|\hat{p} - i\omega\hat{q}|\phi_n\rangle} = \\ &= \overline{\langle X|\hat{a}|\phi_n\rangle} = \overline{\langle X|X\rangle} \geq 0, \quad Q.E.D. \end{aligned}$$

2. Пусть  $|\phi_n\rangle$  собственное состояние оператора  $\hat{a}^+\hat{a}$  с собственным значением  $\lambda_n$ . Тогда  $\hat{a}^+|\phi_n\rangle$  тоже собственное состояние этого оператора (может быть не нормированное на единицу) с собственным значением  $\lambda_n + 1$ .

$$\hat{a}^+\hat{a}|\phi_n\rangle = \lambda_n|\phi_n\rangle, \quad \hat{a}^+\hat{a}^+\hat{a}|\phi_n\rangle = \hat{a}^+(\hat{a}\hat{a}^+ - 1)|\phi_n\rangle = \hat{a}^+\hat{a}\hat{a}^+|\phi_n\rangle - \hat{a}^+|\phi_n\rangle = \lambda_n\hat{a}^+|\phi_n\rangle,$$

$$\text{или } (\hat{a}^+\hat{a})\hat{a}^+|\phi_n\rangle = (\lambda_n + 1)\hat{a}^+|\phi_n\rangle, \quad Q.E.D.$$

3. Пусть  $|\phi_n\rangle$  собственное состояние оператора  $\hat{a}^+\hat{a}$  с собственным значением  $\lambda_n$ . Тогда  $\hat{a}|\phi_n\rangle$  тоже собственное состояние этого оператора (может быть не нормированное на единицу) с собственным значением  $\lambda_n - 1$ .

Опять рассмотрим собственное состояние  $|\phi_n\rangle$  с собственным значением  $\lambda_n$ . Подействуем на это состояние  $N$ -раз оператором уничтожения  $((\hat{a})^N|\phi_n\rangle)$ . Согласно утверждению 3, полученное состояние будет собственным с собственным значением  $\lambda_n - N$ . Каково бы не было значение  $\lambda_n$ , всегда найдется такое  $N$ , чтобы величина  $\lambda_n - N$  стала отрицательной, что противоречит утверждению 1. Выход из этого противоречия состоит в том, чтобы согласиться с тем, что на некотором шаге при действии оператором уничтожения получается нулевой вектор гильбертова пространства, который всегда решает уравнение на собственные состояния, но, по определению, не собственное состояние. Поэтому: должно существовать собственное состояние  $|\phi_0\rangle$  (называется *вакуумное*) такое, что

$$\hat{a}|\phi_0\rangle = 0, \quad \langle\phi_0|\phi_0\rangle = 1.$$

Собственное значение для этого собственного состояния  $\hat{a}^+\hat{a}|\phi_0\rangle = 0$ , равно нулю  $\lambda_n = 0$ . Пришел черед операторов рождения: любое состояние вида  $(\hat{a}^+)^n|\phi_0\rangle$ ,  $n$ - натуральное число, согласно утверждению 2, – собственное с собственным значением  $\lambda_n = n$ . Простые рассуждения (методом от противного) показывают, что можно считать, что других собственных состояний нет. Остается отнормировать полученные состояния. Пусть найдены такие  $c_n$ , что состояние  $|\phi_n\rangle = c_n(\hat{a}^+)^n|\phi_0\rangle$  - нормировано, тогда

$$\begin{aligned} 1 = \langle\phi_n|\phi_n\rangle &= c_n\langle\phi_n|(\hat{a}^+)^n\rangle = \frac{c_n}{c_{n-1}}\langle\phi_n|\hat{a}^+|\phi_{n-1}\rangle = \frac{c_n}{c_{n-1}}\overline{\langle\phi_{n-1}|\hat{a}|\phi_n\rangle} = \\ &= \frac{c_n\bar{c}_n}{c_{n-1}\bar{c}_{n-1}}\overline{\langle\phi_{n-1}|\hat{a}\hat{a}^+|\phi_{n-1}\rangle} = \frac{c_n\bar{c}_n}{c_{n-1}\bar{c}_{n-1}}\overline{\langle\phi_{n-1}|\hat{a}^+\hat{a} + 1|\phi_{n-1}\rangle} = \frac{c_n\bar{c}_n}{c_{n-1}\bar{c}_{n-1}}n. \end{aligned}$$

Решение рекуррентного соотношения  $c_n = 1/\sqrt{n!}$ , как и положено, с точностью до фазового множителя.

So: решение задачи о спектре значений энергии и собственных состояниях гамильтониана для гармонического осциллятора

$$E_n = \hbar\omega(n + 1/2), \quad n = 0, 1, \dots, \quad |n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}}(\hat{a}^+)^n|0\rangle,$$

где вакуумное состояние определяется уравнением  $\hat{a}|0\rangle = 0$ ,  $\langle 0|0\rangle = 1$ ,

(введено новое обозначение  $|\phi_n\rangle = |n\rangle$ ).

Полученные собственные состояния образуют полный базис гильбертова пространства и, следовательно, определяют его. Построенное таким образом пространство состояний называется *фоковским* (В.А.Фок).

Реализация канонических коммутационных соотношений в некотором *конкретном* гильбертовом пространстве (представление канонических коммутационных соотношений) дает практическую возможность решать задачи квантовой механики, причем при некоторых условиях та или иная реализация приводит к физически эквивалентным ответам.

Рассмотрим пространство  $L_2(-\infty < x < \infty, dx)$  комплекснозначных функций  $\phi(x)$ , заданных на всей действительной оси, с суммируемым по мере Лебега  $dx$  квадратом

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \bar{\phi}(x)\phi(x) < +\infty.$$

Две функции, отличающиеся друг от друга на множестве меры нуль, считаются эквивалентными.

Такое пространство линейно. Кет-состоянию гильбертова пространства  $|\phi\rangle$  ставится в соответствие функция  $\phi(x) \in L_2$ , а бра-состоянию  $\langle\phi|$  —  $\bar{\phi}(x)$ . Скалярное произведение

$$\langle\chi|\phi\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx \bar{\chi}(x)\phi(x).$$

Пространство  $L_2$  полно по соответствующему образом определенной норме.

Самосопряженный оператор координаты  $\hat{q}$  определен на  $\mathcal{D}_q$ :  $\phi(x) \in \mathcal{D}_q$ , если  $x\phi(x) \in L_2$ .

Действует этот оператор очень просто

$$\hat{q}|\phi\rangle \Rightarrow x \cdot \phi(x).$$

Самосопряженный оператор импульса  $\hat{p}$  определен на  $\mathcal{D}_p$ :  $\phi(x) \in \mathcal{D}_p$ , если  $\phi(x)$  — абсолютно непрерывная функция и  $\partial_x\phi(x) \in L_2$ . Действие этого оператора на  $\mathcal{D}_p$

$$\hat{p}|\phi\rangle \Rightarrow -i\hbar\partial_x\phi(x).$$

Пара самосопряженных операторов  $\hat{q}, \hat{p}$ , действующих на гильбертовом пространстве  $\mathcal{H}$ , образуют представление канонических коммутационных соотношений, если в  $\mathcal{H}$  существует плотное всюду подпространство  $\mathcal{D} : \mathcal{D} \subseteq \mathcal{D}_q \cap \mathcal{D}_p$  и

$$\hat{q}\hat{p} - \hat{p}\hat{q} = i\hbar\hat{1} \quad \text{на } \mathcal{D}.$$

Проверяем

$$(\hat{q}\hat{p} - \hat{p}\hat{q})|\phi\rangle \Rightarrow x(-i\hbar\partial_x)\phi(x) - (-i\hbar\partial_x)x\phi(x) = -i\hbar\phi(x), \quad Q.E.D.$$

Данная конкретная реализация гильбертова пространства и коммутационных соотношений называется *координатным представлением*. Очевидно, что есть и другие (например, *импульсное представление*).

Рассмотрим гармонический осциллятор в координатном представлении.

$$\hat{H} = \frac{1}{2}\hat{p}^2 + \frac{1}{2}\omega^2\hat{q}^2 \quad \Rightarrow \quad \hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2}\partial_x^2 + \frac{1}{2}\omega^2x^2,$$

(чтобы этот оператор стал наблюдаемой, нужно определить  $\mathcal{D}_H$ ). Задача о спектре гамильтониана и его собственных состояниях

$$-\frac{\hbar^2}{2}\partial_x^2\phi_n(x) + \frac{1}{2}\omega^2x^2\phi_n(x) = E_n\phi_n(x).$$

Прежде чем решать уравнение, его нужно обезразмерить. Источник размерности —  $x$ . Сделаем замену  $x = a_0u$ .

$$-\frac{\hbar^2}{2a_0^2}\partial_u^2\phi_n(u) + \frac{1}{2}\omega^2a_0^2u^2\phi_n(u) = E_n\phi_n(u), \quad \partial_u^2\phi_n(u) - \frac{\omega^2a_0^4}{\hbar^2}u^2\phi_n(u) = -2\frac{E_na_0^2}{\hbar^2}\phi_n(u).$$

Определим  $a_0$  так, чтобы

$$\frac{\omega^2a_0^4}{\hbar^2} = 1, \quad a_0 = \sqrt{\frac{\hbar}{\omega}},$$

и введем новую переменную

$$\epsilon_n = \frac{E_na_0^2}{\hbar^2} = \frac{E_n}{\hbar\omega},$$

тогда уравнение принимает вид

$$(\partial_u^2 - u^2)\phi_n(u) = -2\epsilon_n\phi_n(u).$$

Это уравнение нужно решать. Но не будем, потому что оно уже решено. Найдем вид решений в координатном представлении. Для этого выпишем уравнение на вакуумное

состояние

$$\hat{a}|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\hbar\omega}}(\hat{p} - i\omega\hat{q})|0\rangle = 0 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2\hbar\omega}}(-i\hbar\partial_x - i\omega x)\phi_0(x) = 0,$$

$$(\partial_u + u)\phi_0(u) = 0, \quad \phi_0(u) = Ce^{-u^2/2}.$$

Нормировка

$$1 = \int dx \bar{\phi}(x)\phi(x) = C^2 \sqrt{\frac{\hbar}{\omega}} \int du e^{-u^2} = C^2 \sqrt{\frac{\pi\hbar}{\omega}}, \quad C = \left(\frac{\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4}.$$

Собственные состояния

$$|n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}}(\hat{a}^+)^n|0\rangle \Rightarrow \phi_n(u) = C \frac{e^{-i\pi n/2}}{\sqrt{n!2^n}}(\partial_u - u)^n e^{-u^2/2},$$

и, изменив фазовый множитель (допустимо), ответ можно переписать через полиномы

Эрмита

$$\phi_n(u) = \left(\frac{\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} \frac{1}{\sqrt{n!2^n}} H_n(u) e^{-u^2/2}, \quad H_n(u) = (-1)^n e^{u^2} \frac{d^n}{du^n} e^{-u^2}.$$

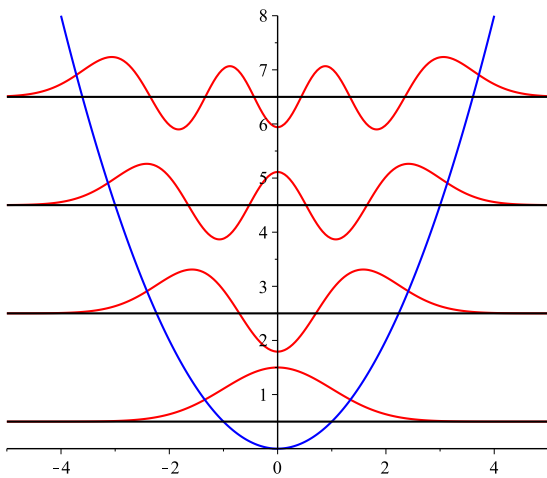


Рис. 9: собственные состояния осциллятора в координатном представлении  $\phi_n(u)$  при  $n = 0, 2, 4, 6$

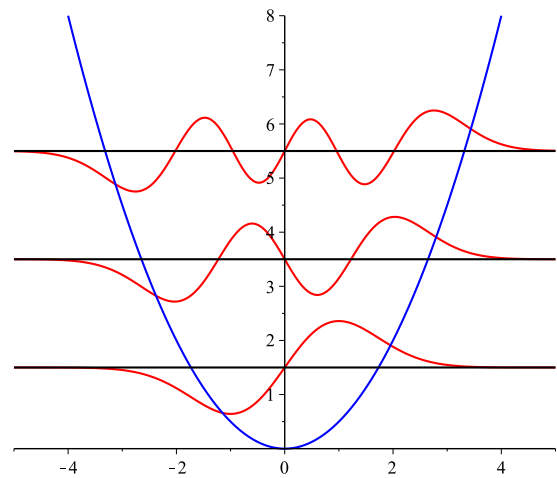


Рис. 10: собственные состояния осциллятора в координатном представлении  $\phi_n(u)$  при  $n = 1, 3, 5$

## ХII. Интегральные уравнения. Импульсное представление квантовой механики

Задача о спектре связанных состояний гамильтониана  $E_n$  одномерной нерелятивистской частицы массы  $m$  в координатном представлении сводится к нахождению решений  $\phi_n(x)$ , лежащих в  $L_2(dx, x \in \mathbb{R}^1)$ , дифференциального уравнения

$$-\frac{1}{2m}\phi_n''(x) + U(x)\phi_n(x) = E_n\phi_n(x), \quad (16)$$

здесь  $U(x)$  - потенциальная энергия, в поле которой движется рассматриваемая частица.

Переходу в импульсное представление отвечает преобразование Фурье волновой функции  $\phi_n(x)$ :

$$\varphi_n(p) = \int dx e^{-ipx} \phi_n(x), \quad \phi_n(x) = \int \frac{dp}{2\pi} e^{ipx} \varphi_n(p).$$

Найдем какое уравнение получается при этом на функцию  $\varphi_n(p)$ . Для этого выполним преобразование Фурье дифференциального уравнения (16):

$$-\frac{1}{2m} \int dx e^{-ipx} \phi_n''(x) + \int dx e^{-ipx} U(x) \phi_n(x) = E_n \varphi_n(p),$$

$$\frac{p^2}{2m} + \int \frac{dq}{2\pi} \int dx e^{-i(p-q)x} U(x) \varphi_n(q) = E_n \varphi_n(p),$$

и, если определить преобразование Фурье потенциальной энергии  $U_k = \int dx e^{-ikx} U(x)$ , получим следующее уравнение на собственные значения

$$\frac{p^2}{2m} \varphi_n(p) + \int \frac{dq}{2\pi} U_{p-q} \varphi_n(q) = E_n \varphi_n(p).$$

Таким образом, одна и та же физическая задача в другом представлении канонических коммутационных соотношений приобретает другую математическую оболочку: вместо решения дифференциального уравнения нужно решать уравнение интегральное.

В этом месте нужно вспомнить или изучить теорию интегральных уравнений. Здесь же ограничимся примером, когда интегральное уравнение на собственные значения решается быстро и просто. Рассмотрим интегральное уравнение

$$\lambda_n \varphi_n(p) = \int dq D(p, q) \varphi_n(q),$$

здесь  $D(p, q)$  - ядро интегрального уравнения. Пусть это ядро имеет простейший *сепарабельный* вид

$$D(p, q) = L(p)R(q),$$

тогда

$$\lambda_n \varphi_n(p) = L(p) C_n, \quad C_n = \int dq R(q) \varphi_n(q),$$

здесь важно, что величина  $C_n$  не зависит от  $p$ . То есть первое соотношение позволяет найти  $\varphi_n$  как функцию  $p$ :

$$\varphi_n(p) = L(p) \frac{C_n}{\lambda_n}.$$

Если теперь воспользоваться вторым соотношением, считая  $C_n \neq 0$ , находим собственное значение (единственное!)

$$\lambda_n = \int dq R(q) L(q), \quad n = 1.$$

Сама же постоянная  $C_n$ , как всегда в линейных задачах, находится из условия нормировки. Конечно же, для того, чтобы эта схема работала на функции  $L(p)$ ,  $R(p)$  следует наложить такие ограничения, чтобы все соответствующие интегралы сходились.

Описанная процедура легко обобщается на ядра интегральных уравнений вида

$$D(p, q) = \sum_{k=1}^N L_k(p) R_k(q),$$

причем в этом случае можно ожидать существования  $N$  собственных значений (возможно вырожденных) этого интегрального уравнения.

### ХIII. Гидродинамика. Уравнение Кортевега-де Вриза

Рассмотрим течение мелкой воды по достаточно широкому каналу. Вязкостью пренебрегаем, жидкость считаем несжимаемой (плотность  $\rho = \text{const}$ , поэтому базовые уравнения Л.Эйлера:

$$\rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \rho (\vec{v}, \vec{\nabla}) \vec{v} = -\vec{\nabla} p + \rho \vec{g}, \quad \text{div} \vec{v} = 0,$$

здесь  $\vec{v}(t; x, y)$  - поле скоростей жидкости,  $p(t; x, y)$  - поле давления (над поверхностью воды считаем давление, равным нулю),  $\vec{g}$  - ускорение свободного падения.

Выполним преобразование из векторного анализа

$$\begin{aligned} (\vec{v}, \vec{\nabla}) v_i &= v_k \partial_k v_i = v_k (\partial_k v_i - \partial_i v_k) + v_k \partial_i v_k = -v_k (\delta_{im} \delta_{kn} - \delta_{in} \delta_{km}) \partial_m v_n + \frac{1}{2} \partial_i v^2 = \\ &= -\epsilon_{ikl} v_k \epsilon_{lmn} \partial_m v_n + \frac{1}{2} \partial_i v^2 = -[\vec{v} \times \text{rot} \vec{v}]_i + \frac{1}{2} \nabla_i v^2. \end{aligned}$$



Если воспользоваться этим соотношением и вычислить ротор от уравнения Эйлера, то получится

$$\frac{\partial}{\partial t} \text{rot} \vec{v} - \text{rot}[\vec{v} \times \text{rot} \vec{v}] = 0.$$

У этого уравнения есть решение  $\text{rot} \vec{v} = 0$ . Поэтому, если в начальный момент времени течение безвихревое, то оно остается таковым и далее. Это означает, что поле скоростей можно представить в виде

$$\vec{v}(t; x, y) = \vec{\nabla} \phi(t; x, y),$$

а уравнение непрерывности выдает, что введенный потенциал удовлетворяет уравнению Лапласа

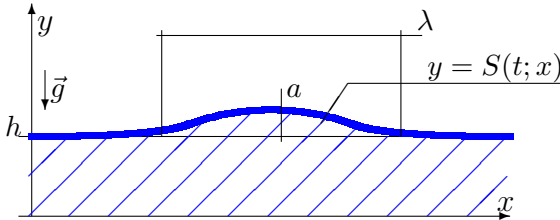
$$\vec{\nabla}^2 \phi(t; x, y) = \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \phi(t; x, y) = 0.$$

Для потенциального течения уравнение Эйлера принимает форму

$$\vec{\nabla} \left[ \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} (\vec{\nabla} \phi)^2 + gy + \frac{p}{\rho} \right] = 0,$$

которая определяет поле давления (интегрирование этого уравнения приводит к произвольной функции времени, которую переопределением потенциала можно сделать равной нулю)

$$p(t; x, y) = -\rho \left[ \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} (\vec{\nabla} \phi)^2 + gy \right]. \quad (17)$$



Течение длинных волн по мелкой воде, однородное в направлении перпендикулярном рис.. Условия:  $h \ll \lambda$ ,  $a \ll h$ ,  $\vec{v} = \vec{v}(t; x, y)$ .

Рассматриваемая задача интересна тем, что происходит со свободной поверхностью  $y = S(t; x)$ , а не с распределением полей скоростей и давления внутри жидкости. В этой задаче нужно получить эволюцию границы, исходя из решения внутри жидкости, а не наоборот, как бывает, например, при жестком задании граничных условий.

Рассмотрим точку с координатами  $(x, y)$  на свободной поверхности. Скорость в этой точке связана с изменением формы этой поверхности с течением времени следующим образом

$$\vec{V} \Big|_{y=S(t;x)} = \left( \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt} \right) \Big|_{y=S(t;x)} = \left( \frac{dx}{dt}, \frac{\partial S(t;x)}{\partial t} + \frac{\partial S(t;x)}{\partial x} \frac{dx}{dt} \right).$$

Если же идти со стороны жидкости, то скорость в точке с координатами  $(x, y)$  определяется потенциалом и равна

$$\vec{V}\Big|_{y=S(t;x)} = \left( \frac{\partial}{\partial x} \phi(t; x, S(t; x)), \frac{\partial}{\partial y} \phi(t; x, S(t; x)) \right).$$

Приравняв эти скорости и исключив  $\frac{dx}{dt}$ , получим граничное условие как функциональное уравнение на  $S(t; x)$

$$\partial_t S(t; x) + \partial_x S(t; x) \cdot \partial_x \phi(t; x, S(t; x)) - \partial_y \phi(t; x, S(t; x)) = 0. \quad (18)$$

Еще одно уравнение на  $S(t; x)$  получается, если вспомнить, что на поверхности давление обращается в нуль (см. (17)):

$$\partial_t \phi(t; x, S(t; x)) + \frac{1}{2} [\vec{\nabla} \phi(t; x, S(t; x))]^2 + gS(t; x) = 0. \quad (19)$$

В эти уравнения входит потенциал  $\phi$ , определяющий поле скоростей в жидкости. Он находится решением уравнения Лапласа. Будем искать решение этого уравнения в виде

$$\phi(t; x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} y^k \varphi_k(t, x), \quad \varphi_0 \equiv \varphi.$$

Подстановка в уравнение Лапласа дает рекуррентное соотношение

$$\varphi_{k+2}(t; x) = -\frac{1}{(k+1)(k+2)} \partial_x^2 \varphi_k(t; x), \quad k = 0, 1, \dots$$

Из условия обращения в нуль нормальной компоненты скорости  $v_y(t; x, 0) = \partial_y \phi(t; x, 0)$  на дне канала следует, что все нечетные компоненты  $\varphi_k$  следует считать равными нулю. Теперь становится важным условие мелкости воды. Действительно, в жидкости  $y \leq h + a$ , а каждая производная по  $x$  приводит к появлению  $1/\lambda$  в полученной последовательности, поэтому каждый последующий член предъявленного разложения имеет относительную малость  $(h/\lambda)^2$ :

$$\phi(t; x, y) = \varphi(t; x) - \frac{1}{2} y^2 \partial_x^2 \varphi(t; x) + \frac{1}{24} \partial_x^4 \varphi(t; x) + \dots$$

Пространственные производные от потенциала, которые входят в уравнения (18), (19), равны (ограничимся первыми двумя членами разложения)

$$\partial_x \phi(t; x, y) = f(t, x) - \epsilon_\lambda \frac{1}{2} y^2 \partial_x^2 f(t; x), \quad \partial_y \phi(t; x, y) = -y \partial_x f(t; x) + \epsilon_\lambda \frac{1}{6} y^3 \partial_x^3 f(t; x),$$

здесь определена новая функция  $f(t; x) = \partial_x \varphi(t; x)$  и введен формальный параметр  $\epsilon_\lambda$ , который означает, что члены разложения с этим параметром малы по величине  $(h/\lambda)^2$ .

В задаче есть еще один малый параметр - малые возмущения поверхности  $a/h \ll 1$ . Чтобы его проявить, запишем

$$S(t; x) = h + \epsilon_a s(t; x), \quad |\epsilon_a s(t; x)| \leq a \ll h.$$

В первом порядке малости по  $\epsilon_a$  получаем

$$\begin{aligned} \partial_x \phi(t; x, S(t; x)) &= f(t, x) - \epsilon_\lambda \frac{1}{2} h^2 \partial_x^2 f(t; x) + O(\epsilon_a^2, \epsilon_a \epsilon_\lambda, \epsilon_\lambda^2), \\ \partial_y \phi(t; x, S(t; x)) &= -h \partial_x f(t; x) - \epsilon_a s(t; x) \partial_x f(t; x) + \epsilon_\lambda \frac{1}{6} h^3 \partial_x^3 f(t; x) + O(\epsilon_a^2, \epsilon_a \epsilon_\lambda, \epsilon_\lambda^2). \end{aligned}$$

Уравнения (18) и (19) не линейны. Как это водится, исследуем их линейную версию. В невозмущенной ситуации  $f(t; x) = s(t; x) = 0$ , поэтому (второе уравнение продифференцировано по  $\partial_x$ ) в низшем порядке малости эффекта

$$\epsilon_a \partial_t s(t; x) + h \partial_x f(t; x) = 0, \quad \partial_t f(t; x) + g \epsilon_a \partial_x s(t; x) = 0.$$

Отсюда следует, что в линейном приближении поля  $s(t; x)$ ,  $f(t; x)$  подчиняются одному волновому уравнению

$$(\partial_t^2 - c^2 \partial_x^2) s(t; x) = 0, \quad (\partial_t^2 - c^2 \partial_x^2) f(t; x) = 0, \quad c^2 = gh,$$

причем, как и возмущение поверхности, поле  $f(t; x)$  имеет первый порядок малости по  $\epsilon_a$ . Такие возмущения поверхности жидкости называются *длинными гравитационными волнами*.

Полученное волновое уравнение можно представить следующим образом

$$(\partial_t - c \partial_x)(\partial_t + c \partial_x) s(t; x) = 0.$$

Отсюда видно, что у волнового уравнения есть решение, для которого  $\partial_t s(t; x) = -c \partial_x s(t; x)$ . Это решение отвечает возмущению, бегущему вправо. Именно такое решение мы и будем подправлять, чтобы учесть эффекты нелинейности (параметр  $\epsilon_a$ ) и дисперсии (параметр  $\epsilon_\lambda$ ). Для такого решения  $f(t; x) = s(t; x) \epsilon_a c/h$ , поэтому в следующем порядке малости по параметрам  $\epsilon_a$ ,  $\epsilon_\lambda$  будем искать решение в виде

$$f(t; x) = \epsilon_a \frac{c}{h} [s(t; x) + \epsilon_a \delta f_a(t; x) + \epsilon_\lambda \delta f_\lambda(t; x)].$$

Граничные условия (18) и (19) принимают следующую форму

$$\begin{aligned}\partial_t s + c\partial_x s + \epsilon_a \left[ c\partial_x \delta f_a + \frac{c}{h} \partial_x s^2 \right] + \epsilon_\lambda \left[ c\partial_x \delta f_\lambda - \frac{1}{6} ch^2 \partial_x^3 \right] &= O(\epsilon_a^2, \epsilon_a \epsilon_\lambda, \epsilon_\lambda^2), \\ \partial_t s + c\partial_x s + \epsilon_a \left[ \partial_t \delta f_a + \frac{c}{2h} \partial_x s^2 \right] + \epsilon_\lambda \left[ \partial_t \delta f_\lambda - \frac{1}{2} h^2 \partial_t \partial_x^2 s \right] &= O(\epsilon_a^2, \epsilon_a \epsilon_\lambda, \epsilon_\lambda^2).\end{aligned}\quad (20)$$

Из этих уравнений следует, во-первых, правильное, но тривиальное утверждение

$$\partial_t s + c\partial_x s = O(\epsilon_a, \epsilon_\lambda), \quad (21)$$

во-вторых, если вычесть одно уравнение из другого и приравнять коэффициенты при независимых параметрах, возникнут два уравнения

$$\begin{aligned}(\partial_t - c\partial_x) \delta f_a(t; x) - \frac{c}{2h} \partial_x s^2(t; x) &= O(\epsilon_a, \epsilon_\lambda), \\ (\partial_t - c\partial_x) \delta f_\lambda(t; x) - \frac{1}{6} h^2 \partial_x^2 (3\partial_t s(t; x) - c\partial_x s(t; x)) &= O(\epsilon_a, \epsilon_\lambda).\end{aligned}$$

Из тривиального, но полезного соотношения (21) следует, что

$$c\partial_x s^2 = -\frac{1}{2} (\partial_t - c\partial_x) s^2 + O(\epsilon_a, \epsilon_\lambda), \quad (3\partial_t - c\partial_x) s = 2(\partial_t - c\partial_x) s + O(\epsilon_a, \epsilon_\lambda),$$

откуда непосредственно получаем, что

$$\delta f_a(t; x) = -\frac{1}{4h} s^2(t; x), \quad \delta f_\lambda(t; x) = \frac{1}{3} h^2 \partial_x^2 s(t; x).$$

Подставив эти значения в уравнение (20), найдем уравнение на поверхность мелкой воды (здесь параметры  $\epsilon_a, \epsilon_\lambda$  можно положить равными единицы):

$$\frac{1}{c} \partial_t s(t; x) + \partial_x s(t; x) + \frac{3}{2h} s(t; x) \partial_x s(t; x) + \frac{1}{6} h^2 \partial_x^3 s(t; x) = 0.$$

Если ввести новые безразмерные переменные

$$\xi = \frac{x - ct}{h}, \quad \tau = \frac{ct}{h}, \quad \mathbf{s} = \frac{3s}{2h},$$

то искомое уравнение становится вот таким

$$\frac{\partial \mathbf{s}(\tau, \xi)}{\partial \tau} + \mathbf{s}(\tau, \xi) \frac{\partial \mathbf{s}(\tau, \xi)}{\partial \xi} + \frac{1}{6} \frac{\partial^3 \mathbf{s}(\tau, \xi)}{\partial \xi^3} = 0.$$

Это и есть уравнение Кортевега-де Вриза. Решать его - увлекательная задача для пытливого ума.

#### XIV. Диамagnetизм Ландау

Спросить Глеба П.

#### XV. Задачи

1. Пусть  $\delta_{S_R}$  - простой слой на сфере  $x_1^2 + \dots + x_n^2 = R^2$ ,  $\delta$ -функция на  $\mathbb{R}^n$ . Найти предел

$$\frac{1}{R^2} \left( \frac{1}{\sigma_n R^{n-1}} \delta_{S_R} - \delta \right), \quad R \rightarrow 0 \quad \text{в } \mathcal{D}',$$

где  $\sigma_n$  - площадь единичной сферы в  $\mathbb{R}^n$ .

2. Решить задачу Коши

$$\frac{\partial^2 Y(t, x)}{\partial t^2} = 9 \frac{\partial^2 Y(t, x)}{\partial x^2} - 2Z(t, x), \quad \frac{\partial^2 Z(t, x)}{\partial t^2} = 6 \frac{\partial^2 Z(t, x)}{\partial x^2} - 2Y(t, x),$$

$$Y(0, x) = \cos x, \quad Z(0, x) = 0, \quad \frac{\partial Y(0, x)}{\partial t} = \frac{\partial Z(0, x)}{\partial t} = 0.$$

3. Классическая частица в потенциале  $U(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{3}{2}x^2 + x$  с энергией  $E = 0$  может совершать финитные движения двух типов: в левой и правой ямах (см. рис.), соответственно. Сравнить периоды этих финитных движений.

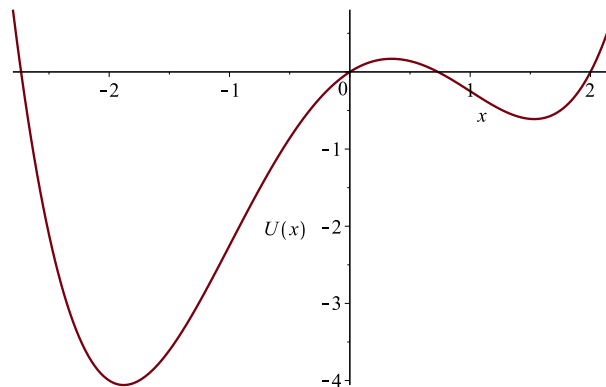


Рис. 11: Потенциальная энергия

4. Решить уравнение

$$\int_0^1 dx (x+y)^2 u(x) = \lambda u(y) + 1.$$

5. Построить конечномерные неприводимые представления алгебры моментов

$$[M_x, M_y] = iM_z, \quad [M_y, M_z] = iM_x, \quad [M_z, M_x] = iM_y.$$

6. Исследовать группы симметрии квантового двумерного гармонического осциллятора

$$\hat{H} = \frac{1}{2}(\hat{p}_x^2 + \hat{p}_y^2) + \frac{1}{2}\omega^2(\hat{q}_x^2 + \hat{q}_y^2).$$

7. Исследовать связанные состояния ( $E_n < 0$ ) в потенциале

$$U(x) = -\kappa\delta(x+a) - \kappa\delta(x-a), \quad \kappa > 0.$$

Вычисления провести в импульсном представлении канонических коммутационных соотношений.

8. Найти дисперсию плоской звуковой волны в вязкой жидкости, которая описывается следующими гидродинамическими уравнениями

$$\rho \left[ \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}, \vec{\nabla}) \vec{v} \right] = -\vec{\nabla} p + \eta \vec{\nabla}^2 \vec{v} + \left( \zeta + \frac{\eta}{3} \right) \vec{\nabla} \operatorname{div} \vec{v} - \text{уравнение Навье-Стокса,}$$

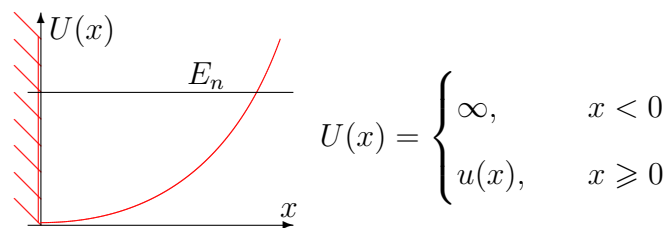
$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \vec{v} = 0 - \text{уравнение непрерывности,}$$

$$p = f(\rho) - \text{уравнение состояния.}$$

Здесь  $\vec{v}(t, \vec{x})$ ,  $\rho(t, \vec{x})$ ,  $p(t, \vec{x})$  - поля скоростей, плотности и давления, соответственно;  $\eta, \zeta$  - коэффициенты вязкости и второй вязкости, соответственно.

Дополнительный вопрос: на какой глубине шум летящего над озером реактивного самолета воспринимается как шелест листьев в осеннем лесу.

9. Найти условие квазиклассического квантования в потенциале



10. Уравнение Бюргера имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial t} u(t, x) + u(t, x) \frac{\partial}{\partial x} u(t, x) = \kappa \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(t, x), \quad \kappa > 0.$$

Решить задачу Коши:  $u(0, x) = \frac{2\kappa}{1 + e^x}$ .

11. Сформулировать (или придумать) красивую задачу математической физики и решить ее.