

ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО – 2018
ЛИСТОК 1

срок сдачи 06.02.2018

1. Приведите пример функции $f(z, \bar{z})$ для которой предел $z \rightarrow 0$ вдоль любой прямой существует, все такие пределы равны, но $\lim_{z \rightarrow 0} f(z, \bar{z})$ не существует.

2. Покажите, что если $f(z)$ дифференцируемая в окрестности точки $z = a$ функция комплексного переменного, то функция $\overline{f(\bar{z})}$ будет дифференцируемой в окрестности $z = \bar{a}$ и найдите ей производную в \bar{a} .

3.

а) Найдите уравнение окружности, проходящей через не лежащие на одной прямой точки z_1, z_2, z_3 .

б) Докажите, что точки z_1, z_2, z_3, z_4 лежат на одной окружности тогда и только тогда, когда их двойное отношение $\frac{z_1 - z_2}{z_1 - z_3} : \frac{z_4 - z_2}{z_4 - z_3}$ вещественно.

4. Докажите что дробно-линейные преобразования переводят обобщённые окружности в обобщённые окружности.

5. Покажите, что если для голоморфной в области D функции f при всех $z \in D$ выполняется $f(z) \in \mathbb{R}$ или $|f(z)| = 1$, то эту функция постоянна.

6. Найдите все голоморфные функции $f(z, \bar{z})$ такие что

а) $\operatorname{Im} f(z) = \ln(x^2 + y^2) + x - 2y$

б) $\arg f(z) = xy \pmod{2\pi}$

7. Докажите, что если f голоморфная в области D функция, то $\operatorname{Re} f$ и $\operatorname{Im} f$ гармонические в D . Что можно сказать о функциях $|f|$ и $\arg f$?

8. Найдите все гармонические функции $F(x, y)$ вида $F = \varphi(x^2 + y^2)$, $F = \varphi(x^2 - y^2)$, $F = \varphi(\frac{y}{x})$.

9. Найдите голоморфные функции, с постоянными вдоль линий семейства $\{x^2 + y^2 = Cx | C \in \mathbb{R}\}$ действительной частью, мнимой частью, модулем и аргументом.

10. Докажите, что если все корни многочлена $P(z)$ вещественны, то для любого вещественного a все корни многочлена $Q(z) = P(z + ia) + P(z - ia)$ также вещественны.