# Лекция 3-18. Аналитические функции и их свойства

## 1 Напоминание

**Определение 1** *Радиусом сходимости степенного ряда*

$$\sum a_n z^n \tag{1}$$

*называется такое $R$, что вне круга радиуса $R$ с центром в нуле ряд расходится, а в любом круге радиуса $r < R$ с центром 0 ряд сходится равномерно.*

**Теорема 1** *(формула Коши - Адамара) Радиус сходимости степенного ряда* (1) *равен*

$$R = \frac{1}{\overline{lim} \sqrt[n]{|a_n|}}. \tag{2}$$

**Доказательство** Доказательство проводится сравнением ряда с геометрической прогрессией. □

Еще напоминание: определение верхнего предела.

**Определение 2** *Верхним пределом ограниченной сверху последовательности действительных чисел $(a_n)$ называется*

$$\overline{\lim} a_n = \lim_{n \to \infty} \sup_{k > n} a_k.$$

Нам понадобится следующее свойство верхнего предела, доказанное в первом семестре в виде задачи:

$$\overline{\lim} a_n = a \Rightarrow \forall \varepsilon \exists N : \forall n > N,\ a_n < a + \varepsilon.$$

## 2 Доказательство формулы Коши - Адамара

Рассказано на лекции.

## 3 Аналитические функции

Любой функции, бесконечно гладкой в окрестности нуля, соответствует ее формальный ряд Тейлора.

**Определение 3** *Бесконечно гладкая функция, к которой сходится ее ряд Тейлора, называется аналитической. Точнее, функция называется аналитической в некоторой точке, если ее ряд Тейлора в этой точке сходится к ней в некоторой окрестности этой точки. Функция называется аналитической в области, если она аналитична в каждой точке этой области.*

**Задача 1** *Приведите пример степенного ряда, который не сходится нигде, кроме нуля.*

**Задача 2** *Докажите, что функция* $2^{-\frac{1}{x^2}}$ *- бесконечно гладкая на всей прямой. Найдите ряд Тейлора в нуле этой функции.*

**Задача 3** *Докажите, что для любой последовательности чисел* $a_n$ *существует функция, имеющая все производные в нуле, ряд Тейлора которой в нуле имеет вид* (1).

**Задача 4** **Докажите теорему Бореля: для любой последовательности действительных чисел* $a_n$ *существует функция, имеющая все производные на всей прямой, ряд Тейлора которой в нуле имеет вид* $\sum a_n x^n$.

Эти задачи показывают, что ряд Тейлора функции может расходиться, и может сходиться, но не к ней. Ничего подобного для аналитических функций не происходит.

Для решения последних двух задач нужно воспользоваться срезающими функциями: бесконечно гладкими функциями, равными нулю вне некоторой окрестности нуля и равными 1 внутри некоторой меньшей окрестности нуля. Само существование таких функций - тоже задача. Мы решим ее позже, а сейчас предположим, что хотя бы одна такая функция $\varphi(x)$ существует.

# 4 Свойства аналитических функций

**Теорема 2** *Аналитическая функция, плоская в нуле, равна нулю в некоторой окрестности нуля.*

**Теорема 3** *Аналитическая функция, плоская в нуле и определенная на интервале, равна нулю на всем этом интервале.*

**Теорема 4** *Аналитическая функция имеет только изолированные нули и критические точки.*

**Доказательство** Из формулы Тейлора следует, что функция, неплоская в точке, может иметь в этой точке только изолированный ноль и изолированный ноль производной. Это было доказано раньше. □

Напишите подробные доказательства этих теорем.

# 5 Чудеса комплексного анализа

**Определение 4** *Пусть $G$ - область (т. е. открытое множество) в $\mathbb{C}$, $f : G \to \mathbb{C}$ - функция. Эта функция называется голоморфной в точке $a \in G$, если у нее в этой точке существует производная*

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}. \tag{3}$$

*Функция голоморфна в области, если она голоморфна в каждой точке этой области.*

Это определение на вид ничем не отличается от хорошо нам знакомого определения для вещественных функций. Но оно на самом деле требует очень многого. Например, такие простейшие многочлены как $Rez = x$ и $Imz = y$ не голоморфны. Дело в том, что теперь $h$ комплексное и может стремиться к нулю по разным направлениям. Когда оно стремится к нулю по вещественной оси, предел (3) для функции $Rez$ равен 1, а по мнимой - нулю. Значит, этого предела вообще не существует. А как обстоит дело для функции $Imz$?

Голоморфны ли функции $z$? $\bar{z}$? $|z|^2$?$z^2$?

Тем самым, голоморфных функций существенно меньше, чем гладких. Зато они обладают рядом замечательных свойств.

**Теорема 5** *Все голоморфные функции бесконечно дифференцируемы и, более того, аналитичны.*

Тем самым, существование только одной комплексной производной влечет существование всех остальных и даже разложимость функции в ряд Тейлора! Эти результаты доказываются в курсе комплексного анализа. Они существенно облегчают изучение аналитических функций, которое мы и отложим до поры.

# 6 Аналитичность элементарных функций

Чтобы проверить, что степенной ряд сходится в некотором круге с центром ноль, достаточно проверить, что радиус круга меньше, чем радиус сходимости ряда. Чтобы проверить, что ряд Тейлора функции сходится к ней самой, нужно проверить, что остаточный член в формуле Тейлора стремится к нулю.

**Теорема 6** *Ряды Тейлора функций синус и косинус сходятся на всей комплексной плоскости. Они сходятся к самим этим функциям на всей вещественной прямой равномерно на каждом отрезке.*

**Теорема 7** *Ряд Тейлора функции $(1+x)^a$ сходится в открытом единичном круге. Он сходится к самой этой функции на интервале (-1,1) равномерно на каждом отрезке, принадлежащем этому интервалу.*

Доказательства этих теорем предлагаются в качестве задач. Мы исследуем только сходимость к нулю остаточного члена для синуса и косинуса.

Все производные функций синус и косинус - это либо синусы, либо косинусы со знаками плюс и минус. Остаточный член в форме Лагранжа для функции синус - разность функции и ее тейлоровского многочлена $T_n$ степени $n$ на отрезке $[-a, a]$ - имеет вид:

$$R_n(x) = \frac{\sin^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} x^{(n+1)}, \ |x| < a, |\xi| < x.$$

Он оценивается сверху констанстой $r_n = \frac{a^n}{(n+1)!}$ . Но последовательность $r_n$ стремится к нулю. Следовательно, последовательность функций $R_n$ равномерно сходится к нулю на отрезке $[-a, a]$ . Но тейлоровский многочлен $T_n(x)$ - это и есть $n$-я частная сумма ряда Тейлора для функции синус. Значит, ряд Тейлора равномерно сходится к этой функции на отрезке $[-a, a]$, где $a$ - любое.

# 7 Голоморфность аналитических функций

**Теорема 8** *Аналитические функции голоморфны. Ряд Тейлора для производной получается почленным дифференцированием ряда Тейлора для самой функции.*

Вместе с предыдущими результатми эта теорема показывает, что классы аналитических и голоморфных функций совпадают. Справедлива более сильная теорема.

**Теорема 9** *Аналитические функции бесконечно дифференцируемы. Степенной ряд, сходящийся к такой функции - это ее ряд Тейлора.*

Первое утверждение теоремы 9 следует из теоремы 8; доказывается индукцией по порядку производной. Второе утверждение теоремы 9 следует из второго утверждения теоремы 8.

Доказательство теоремы 8 для физиков. При достаточно большом $N$, $N$-я частная суммая степенного ряда неотличима от суммы ряда, а для частных сумм (многочленов) теорема очевидна.

Аккуратное доказательство не так просто и проводится в несколько шагов.

**Доказательство** [теоремы 8] Рассмотрим аналитическую функцию, представленную ее степенным рядом в круге его сходимости:

$$f(z) = \sum a_n z^n, \ |z| < R, \tag{4}$$

где $R$ -радиус сходимости степенного ряда для $f$. Фиксируем $z$, $|z| < R$. Рассмотрим формальный ряд (то есть ряд, о сходимости которого пока ничего не говорится).

$$S(z) = \sum n a_n z^{n-1}, \tag{5}$$

полученный почленным дифференцированием ряда (4).

**Предложение 1** *Радиус сходимости ряда* (5) *такой же, как у ряда* (4).

**Доказательство** В точке $z \neq 0$ ряды $S(z)$ и $zS(z)$ сходятся или расходятся одновременно. Радиус сходимости ряда $zS(z)$ равен $\frac{1}{\overline{lim}\sqrt[n]{n|a_n|}} = R$, поскольку $\lim \sqrt[n]{n} = 1$.
□

Из этого предложения следует, что ряд $S(z)$ сходится в том же круге радиуса $R$, что и ряд для $f$. Обозначим сумму этого ряда через $\varphi(z)$. Мы хотим доказать, что $f' = \varphi$. Рассмотрим разностное отношение

$$\Phi(z,h) = \frac{f(z+h) - f(z)}{h}.$$

**Лемма 1** *При каждом фиксированном* $z,\ |z| < R$ *выполняется:* $\lim_{h\to 0} \Phi(z,h) = \varphi(z)$.

Эта лемма влечет теорему. Если заменить $\Phi(z,h)$ и $\varphi(z)$ частными суммами соответствующих рядов, лемма становится очевидной. Нужно доказать, что такая замена правомерна. Имеем:

$$\Phi(z,h) = \sum a_n((z+h)^{n-1} + z(z+h)^{n-2} + ... + z^{n-1}).$$

При фиксированных $z$ и $h$ это - обычный числовой ряд. Обозначим его $n$-ю частную сумму через $\Phi_n(z,h)$, а $n$-ю частную сумму ряда для $\varphi(z)$ через $\varphi_n(z)$.

Фиксируем $z,\ |z| < R$; возьмем произвольное $\varepsilon$ и такое $N_1$, что при $n > N_1$

$$|\varphi(z) - \varphi_n(z)| < \varepsilon. \tag{6}$$

Сравним теперь частную сумму ряда для $\Phi(z,h)$ с самим рядом.

**Предложение 2** *Пусть* $|z| + |h| < R$. *Тогда для любого* $\varepsilon > 0$ *существует такое* $N_2$ *что для любого* $n > N_2$ *выполнено:*

$$|\Phi(z,h) - \Phi_n(z,h)| < \varepsilon. \tag{7}$$

**Доказательство** Имеем:

$$|\Phi(z,h) - \Phi_n(z,h)| = |\sum_n^\infty a_k((z+h)^{k-1} + z(z+h)^{k-2} + ... + z^{k-1})| \leq \sum_n^\infty |a_k|k(|z|+|h|)^{k-1}$$

Поскольку $|z| + |h| < R$, ряд $\sum_1^\infty |a_k|k(|z|+|h|)^{k-1}$ сходится. Значит, его хвост может быть сделан сколь угодно малым. □

Фиксируем то же $z$, $\varepsilon$ и $n > \max(N_1, N_2)$. Возьмем такое $\delta < R - |z|$, что при $|h| < \delta$,

$$|\Phi_n(z,h) - \varphi_n(z)| < \varepsilon. \tag{8}$$

Это можно сделать, поскольку $\lim_{h\to 0}\Phi_n(z,h)=\varphi_n(z)$.

Итак, для любого $z$, $|z|<R$ нами выбраны $\delta$ и $n$ так, что для любого $h:|h|<\delta$ выполняются неравенства (6), (7) и (8). Отсюда следует, что

$$|\Phi(z,h)-\varphi_(z)|<3\varepsilon.$$

$\square$