Лекция 4. Компактность в полных метрических пространствах.

Для числовой прямой *критерий Коши*, позволяет определять сходимость последовательности в терминах самой последовательности, не прибегая ни к какому явному упоминанию о её пределе. Как и бывает при обобщениях с большинством полезных утверждений, критерий Коши становится для метрических пространств определением отдельного свойства.

Определение. Посл-ть $\{x_n\}$ точек метрического пространства (M,ρ) называется *последовательностью Коши* (или *фундаментальной*), если $\forall\ \varepsilon>0\ \exists\ N\ \ \forall n>N\ \ \forall m>N: \rho(x_n, x_m)<\varepsilon$.

Лемма. а) Если $\{x_n\}$ сходится (=имеет предел), то $\{x_n\}$ фундаментальна (из нер-ва треугольника).

б) Обратное неверно, примеры: прямая без точки, открытый круг, $\mathbb{Q}$….

в) Если $\{x_n\}$ фундаментальна, а какая-то её подпоследовательность сходится, то к тому же пределу сходится и вся последовательность (что-то вроде «леммы о подпоследовательности милиционеров»).

Определение. (M,ρ) *полно*, если в нём из фундаментальности следует сходимость.

Теперь *критерий Коши* для числовой прямой выглядит так: $\mathbb{R}$ **- полное метрическое пространство**.

Теорема 1. Следующие метрические пространства являются полными: 1) $\mathbb{R}^2$; 2) $\mathbb{R}^n$ (с евклидовой метрикой); 3) Декартово произведение $M_1\times M_2$ полных пространств с метрикой $\rho((x_1,x_2),(y_1,y_2))=\sqrt{\rho_1(x_1,y_1)^2+\rho_2(x_2,y_2)^2}$; 4) C[0;1] с равномерной метрикой; 5) замкнутое подмножество полного пространства; 6) компактное метрическое пространство.

Следующий критерий полноты есть аналог теоремы Кантора о стягивающихся отрезках.

Теорема 2. («о вложенных шарах»**)** Для любого метрического пространства (M,ρ) TFAE:

(1) (M,ρ) полно; (2) Любая последовательность вложенных *замкнутых* шаров, радиусы которых стремятся у нулю, имеет общую (единственную) точку.

(! если радиусы не стремятся к нулю, то может так случиться, что общих точек нет;

!!шары можно (и удобнее) заменить на ***множества, диаметры*** *которых стремятся к нулю, (2'))*

В теоремах о компактности для $\mathbb{R}^n$ базовый технический момент – возможность разбиения на конечное число «малых» подмножеств. Для общих метрических пространств возможность такого разбиения приходится вводить, как отдельное свойство.

Определение. Подмножество X метрического пространства (M,ρ) называют *вполне ограниченным*, если $\forall\varepsilon>0\ \exists n \exists\{x_1,...,x_n\}\subset X\ \forall x\in X\ \exists\, 1\le i\le n: \rho(x,x_i)<\varepsilon$ (или $\forall\varepsilon>0$ в X есть конечная $\varepsilon-$сеть).

!!! Вместо $\{x_1,...,x_n\}\subset X$ *можно использовать и* $\{x_1,...,x_n\}\subset M$ *: из* $\varepsilon-$*сети для X, лежащей в M, можно построить* $2\varepsilon-$*сеть, лежащую в X!!!*

Для $\mathbb{R}^n$ ограниченность и вполне ограниченность – одно и то же свойство. Достаточно (*n=2*) квадрат резать на мелкие квадратики и в каждом выбирать по одной точке; так конечные сети и получаются. Часто *вполне ограниченность* называют *предкомпактностью*. Дело в том, что если в полном метрическом пространстве подмножество вполне ограничено, то его *замыкание* (= множество $\cup$ все его предельные точки) является компактом.

Теорема 3. Для метрического пространства (M,ρ) TFAE: (1) M компактно; (2) M полно и вполне ограничено.

Теорема 3'. Для подмножества X полного метрического пространства (M,ρ) TFAE: (1) X компактно; (2) X замкнуто и вполне ограничено.