Листок 1.5

Движения плоскости и их комплексная запись. Ряды

срок сдачи 9 февраля

Обозначения задач: **СБ** — задача без звёздочки только для студентов Совбака («математикам» её сдавать нельзя), без значка — задача без звёздочки для всех, **(∗)** — задача без звёздочки для «математиков» и со звёздочкой для студентов Совбака, ∗ — задача со звёздочкой для всех.

Теорема Шаля

Определение. Упорядоченная пара неколлинеарных векторов *положительно ориентирована*, если второй вектор лежит в левой полуплоскости относительно ориентированной прямой, порожденной первым вектором. В противном случае пара векторов *ориентирована отрицательно.*

Определение. Движение плоскости *сохраняет* (*меняет*) *ориентацию*, если оно переводит положительно ориентированную пару в положительно (отрицательно) ориентированную.

Теорема (Теорема Шаля)**.** *Движение плоскости, сохраняющее ориентацию — это либо поворот, либо параллельный перенос; меняющее ориентацию — это осевая симметрия или скользящая симметрия (композиция осевой симметрии и переноса вдоль оси симметрии).*

Задача 1.[СБ] Докажите, что сохраняющее ориентацию движение плоскости, переводящее хотя бы одну прямую в не параллельную ей, имеет неподвижную точку и является поворотом.

Задача 2.[СБ] Докажите, что сохраняющее ориентацию движение плоскости, переводящее любую прямую в параллельную ей, является переносом.

Задача 3.[СБ] Докажите, что меняющее ориентацию движение плоскости, имеющее хотя бы одну неподвижную точку, является осевой симметрией.

Задача 4.[СБ] Докажите, что меняющее ориентацию движение плоскости, не имеющее неподвижных точек, является скользящей симметрией.

Указание. Рассмотрите квадрат изучаемого преобразования.

Движения евклидовой плоскости как преобразования комплексной прямой

Задача 5.[СБ] Докажите, что отображение $z \mapsto az + b$ для любых $a \in \mathbb{C}^*,\ b \in \mathbb{C}$ — поворот с растяжением или перенос; последнее бывает если и только если $a = 1$.

Задача 6.[СБ] Докажите, что любое преобразование $z \mapsto az + b,\ |a| = 1, a \neq 1$ — поворот; и любой поворот может быть так записан.

Задача 7.[СБ] Воспользовавшись предыдущей задачей, докажите, что произведение двух поворотов на углы с ненулевой суммой по модулю 2π — снова поворот, а на углы с нулевой суммой по модулю 2π — перенос.

Задача 8.[СБ] Докажите, что произведение двух скользящих симметрий с параллельными осями — перенос, а с непараллельными — поворот.

Задача 9.[(∗)] Докажите, что преобразование $z \mapsto i\bar{z} + 1 - i$ является симметрией и найдите её ось.

Задача 10.[(∗)] Докажите, что преобразование $z \mapsto a\bar{z} + b$ является осевой симметрией, если и только если $|a| = 1$ и $a\bar{b} + b = 0$.

Задача 11.(*) Докажите, что отображение $z \mapsto az + b\bar{z}$, $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ биективно если и только если $|a| \neq |b|$. Оно сохраняет ориентацию, если $|a| > |b|$ и меняет её, если $|a| < |b|$.

Задача 12.(*) Любой многочлен от x и y с комплексными коэффициентами можно записать как многочлен от z и $\bar{z}$ тоже с комплексными коэффициентами. Это соответствие взаимно однозначно и сохраняет степень многочлена. Если многочлен от z и $\bar{z}$ обращается в нуль при всех $z \in \mathbb{C}$, все его коэффициенты равны нулю. Докажите эти утверждения.

Задача 13.(*) Докажите, что многочлен от z и $\bar{z}$ голоморфен если и только если коэффициенты перед всеми его членами, содержащими $\bar{z}$, равны нулю.

Ряды

Задача 14.* Докажите, что для любой последовательности чисел (a_n) существует функция f на прямой, такая что для любого n справедливо, что $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k x^k + o(x^n)$ при $x \to 0$.

Для решения последней задачи нужно воспользоваться срезающими функциями — бесконечно гладкими функциями, равными нулю вне некоторой окрестности нуля и равными 1 внутри некоторой меньшей окрестности нуля. Само существование таких функций — тоже задача. Мы решим её позже, а сейчас предположим, что хотя бы одна такая функция $\varphi(x)$ существует.

Задача 15.* Докажите теорему Бореля: для любой последовательности чисел a_n существует функция, имеющая все производные на всей прямой, ряд Тейлора которой в нуле имеет вид $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n z^n$.

В обеих задачах искомая функция задаётся в виде ряда. Последняя задача требует доказать, что сумма этого ряда — бесконечно дифференцируемая функция.

Аналитические функции

Задача 16.(*) Аналитическая функция, плоская в нуле, равна нулю в некоторой окрестности нуля.

Задача 17.(*) Аналитическая функция, плоская в нуле и определённая на интервале, равна нулю на всем этом интервале.

Задача 18.(*) Аналитическая функция имеет только изолированные нули и критические точки.

Задача 19. Ряд Тейлора функции $(1+x)^a$ сходится в открытом единичном круге. Он сходится к самой этой функции на интервале $(-1, 1)$ равномерно на каждом отрезке, принадлежащем этому интервалу.

Задача 20. Ряды Тейлора функций $\sin x$ и $\cos x$ сходятся на всей комплексной плоскости. Они сходятся к самим этим функциям на всей вещественной прямой равномерно на каждом отрезке.

Задача 21.(*) Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} n^k |a_n| \in (0, \infty)$. Докажите, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, если $k > 1$, и расходится, если $k \leq 1$.