ЛИСТОК 3

1. Элементарные вычисления.

Пусть G — группа, действующая гладкими отображениями на многообразии M. Говорят, что форма ω на M инвариантна относительно группы G, если $A^*\omega = \omega$, где $A : M \to M$ — произвольное отображение из группы G. Две замкнутые формы называются когомологичными, если их разность — точная форма.

Задача 1. а) Докажите, что всякая 1-форма на S^1 когомологична форме, инвариантной относительно поворотов. б) Выведите из результата пункта 1а, что 1-форма ω на S^1 точна тогда и только тогда, когда $\int_{S^1} \omega = 0$. Вычислите $H^1_{\mathrm{DR}}(S^1)$. в) Используя тот же метод, вычислите $H^k_{\mathrm{DR}}(S^1 \times S^1)$ при $k = 0, 1, 2$.

Задача 2. Пусть $f : S^2 \to \mathbb{R}P^2$ — стандартное двулистное накрытие (отображение, переводящее точку единичной сферы в прямую, проведенную через эту точку и центр сферы). Пусть $A : S^2 \to S^2$ — отображение, переводящее каждую точку сферы в диаметрально противоположную. а) Пусть ω — 2-форма на S^2. Докажите, что 2-форма ν на $\mathbb{R}P^2$ такая, что $\omega = f^*\nu$, существует тогда и только тогда, когда $A^*\omega = \omega$. б) Докажите, что каждая 2-форма на $\mathbb{R}P^2$ точна.

2. Интегрирование форм и теорема Стокса

Пусть $M = \mathbb{R}^2$ с координатами x и y; $z \overset{\text{def}}{=} x + iy$ (комплекснозначная функция на M), $dz \overset{\text{def}}{=} dx + idy$ (комплекснозначная 1-форма на M), $p_n \overset{\text{def}}{=} \mathrm{Re}(z^n\, dz)$, $q_n \overset{\text{def}}{=} \mathrm{Im}(z^n\, dz)$, где $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ (обычные, вещественнозначные 1-формы на M; например, $p_1 = xdx - ydy$, $q_1 = xdy + ydx$).

Задача 3. а) Найдите dp_n и dq_n. б) Найдите $\int_{x^2+y^2=R^2} p_n$ и $\int_{x^2+y^2=R^2} q_n$. в) Для каких n существуют функции $f_n, g_n : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ такие, что $df_n = p_n$ и $dg_n = q_n$? Найдите эти функции явно.

Задача 4. Пусть M — множество касательных векторов единичной длины к сфере $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$. а) Введите на M структуру трехмерного ориентированного гладкого многообразия. б) Пусть $S_a \subset M$ — множество векторов $v \in M$, касающихся сферы в заданной точке $a \in S^2$, и пусть $R_\varphi : M \to M$ — преобразование, поворачивающее каждый вектор $v \in S_a$ на угол φ (точка приложения a не меняется). Постройте пример 1-формы ν на M такой, что $R^*_\varphi \nu = \nu$ для всех φ и $\int_{S_a} \nu = 1$ для всех $a \in S^2$. в) Найдите $\int_L \nu$, где $L \subset S^2$ — множество векторов, касающихся экватора сферы (в точках экватора) и направленных с запада на восток.

3. Последовательность Майера–Виеториса

Задача 5. Вычислите последовательность Майера–Виеториса (т.е. все входящие в нее группы и гомоморфизмы) для покрытия $X = U_1 \cup U_2$, где а) $X = S^n$, $U_1 = S^n \setminus \{a\}$, $U_2 = S^n \setminus \{b\}$, где $a, b \in S^n$ — диаметрально противоположные точки. б) $X = \mathbb{T}^2 = S^1 \times S^1$ (двумерный тор), $U_1 = (S^1 \setminus \{a\}) \times S^1$, $U_2 = (S^1 \setminus \{b\}) \times S^1$, где $a, b \in S^1$ — диаметрально противоположные точки. в) $X = [0,1]^2/((x,0) \sim (x,1), (0,y) \sim (1, 1-y))$ (бутылка Клейна); $U_1 = \{(x,y) \in K \mid x \neq 0, x \neq 1\}$, $U_2 = \{(x,y) \in K \mid x \neq 1/2\}$. г) X — сфера с g ручками, U_1 — ручка (открытая), U_2 — дополнение $X \setminus U_1$ плюс ободок в основании ручки U_1.

Указание (к пункту 5г)**.** Докажите, что сфера с g ручками и с дыркой гомотопически эквивалентна букету $2g$ окружностей.

Задача 6. Используя последовательность Майера–Виеториса, вычислите когомологии де Рама пространства $\mathbb{R}^3 \setminus S^1$, где $S^1 \overset{\text{def}}{=} \{(x, y, 0) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1\}$. Укажите явно замкнутые формы, классы когомологий которых образуют базис в соответствующих группах когомологий.

4. Умножение в когомологиях

Задача 7. Пользуясь результатом задачи 1в, вычислите явно умножение в когомологиях де Рама тора $S^1 \times S^1$.

Задача 8. Опишите действие на когомологиях $\mathbb{C}P^1 = S^2$ отображения f, заданного формулой $f([z : w]) = [z^n : w^n]$

5. Дополнительные задачи

Задача 9. Пусть $S^2 = \{(x,y,z) \mid x^2+y^2+z^2=1\}$, и $L_t \stackrel{\text{def}}{=} \{(x,y,z) \in S^2 \mid z \le t\}$, где $-1 \le t \le 1$. а) Докажите, что L_t при $-1 < t < t$ — гладкое многообразие с краем, диффеоморфное кругу и гомотопически эквивалентно точке. б) Пусть ω — 2-форма на S^2. Докажите, что существует семейство 1-форм ν_t на L_t, $-1 < t < 1$, гладко зависящее от t и такое, что $d\nu_t = \omega$ на L_t. в) Выведите из конструкции пункта 9б, что ω — точная форма (на S^2) тогда и только тогда, когда $\int_{S^2} \omega = 0$. г) Обобщите это утверждение на n-мерную сферу S^n.

Пусть $f : S^n \to S^n$ — гладкое отображение.

Задача 10. Пользуясь утверждением задачи 9г, докажите, что отношение $\deg f \stackrel{\text{def}}{=} \left(\int_{S^n} f^*\omega\right)/\left(\int_{S^n} \omega\right)$ не зависит от выбора n-формы ω (при условии, что $\int_{S^n} \omega \ne 0$). Число $\deg f$ называется степенью отображения f.

Задача 11. а) Пусть $c \in S^n$ — регулярное значение отображения f, т.е. если $x \in f^{-1}(c)$, то $\det f'(x) \ne 0$. Докажите, что прообраз $f^{-1}(c) \subset S^n$ конечен. б) Пусть c — регулярное значение f и $f^{-1}(c) = \{x_1, \dots, x_N\}$. Докажите, что существуют окрестности $U \ni c$ и $U_i \ni x_i$ при $i = 1, \dots, N$ такие, что $f|_{U_i} = U$ и $f : U_i \to U$ — диффеоморфизм для всех $i = 1, \dots, N$. в) Докажите, что на S^n существует n-форма ω с носителем $\operatorname{supp} \omega \subset U$. Применяя к ω утверждение задачи 10, докажите, что $\deg f = \sum_{i=1}^N \operatorname{sign} \det f'(x_i)$.

Задача 12. Пусть $M = \mathbb{C}P^2$, $U_1 = \{[x:y:z] \in \mathbb{C}P^2 \mid x \ne 0\}$, $U_2 = \{[x:y:z] \in \mathbb{C}P^2 \mid y \ne 0 \text{ или } z \ne 0\}$. а) Докажите, что U_1 диффеоморфно $\mathbb{C}^2$ и гомотопически эквивалентно точке, U_2 равно $\mathbb{C}P^2 \setminus \{[1:0:0]\}$ и гомотопически эквивалентно $\mathbb{C}P^1 = \{[0:y:z] \in \mathbb{C}P^2\}$, то есть двумерной сфере, а $U_1 \cap U_2$ диффеоморфно $\mathbb{C}^2 \setminus \{(0,0)\}$ и гомотопически эквивалентно трехмерной сфере. б) Вычислите последовательность Майера–Виеториса для разбиения $M = U_1 \cup U_2$ (т.е. вычислите все входящие в нее группы и гомоморфизмы). в) Вычислите явно формы, составляющие базис в $H^2_{\mathrm{DR}}(\mathbb{C}P^2)$ и $H^4_{\mathrm{DR}}(\mathbb{C}P^2)$. г) Пользуясь результатом задачи 12в, вычислите явно умножение в когомологиях де Рама $\mathbb{C}P^2$. д) Опишите действие на когомологиях $\mathbb{C}P^2$ отображения $f : \mathbb{C}P^2 \to \mathbb{C}P^2$, заданного формулой $f([x:y:z]) = [x^2 : y^2 : z^2]$.