

Семинар 3.

Проективные преобразования и проективные отображения

Задача 1. Сколько неподвижных точек может иметь проективное преобразование f проективной прямой, отличное от тождественного?

Задача 2. Назовем проективное преобразование $f : \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^1$ *инволюцией* на $\mathbb{P}^1$, если f не является тождественным и $f \circ f = \text{id}$. Пусть проективное преобразование f прямой $\mathbb{P}^1$ задано в проективных координатах $(x_1 : x_2)$ в $\mathbb{P}^1$ формулами $(x_1 : x_2) \mapsto (ax_1 + bx_2 : cx_1 + dx_2)$.

- а) Какое условие на матрицу $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ необходимо и достаточно для того, чтобы f было инволюцией?
б) Пусть f - инволюция на $\mathbb{P}^1$. Сколько неподвижных точек может она иметь? Зависит ли ответ от характеристики основного поля $\mathbf{k}$?

Задача 3. а) Сколько имеется проективных преобразований $f : \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^1$ над полем $\mathbf{k} = \mathbb{F}_2$? Сколько среди них инволюций?

б) Те же вопросы, когда $\mathbf{k} = \mathbb{F}_3$?

Задача 4. Пусть аффинная плоскость $\mathbb{A}^2$ с координатами (x, y) вложена в проективную плоскость $\mathbb{P}^2$ с координатами $(x_0 : x_1 : x_2)$ как стандартная аффинная карта посредством отображения $(x, y) \mapsto (1 : x : y)$. Рассмотрим в $\mathbb{A}^2$ аффинную прямую $\mathbb{A}^1 = \{x = 0\}$ и отображение $f : \mathbb{A}^2 \setminus \mathbb{A}^1 \rightarrow \mathbb{A}^2$, $(x, y) \mapsto (\frac{1}{x}, \frac{y}{x})$. Продолжается ли оно до проективного преобразования плоскости $\mathbb{P}^2$? Если да, то напишите формулы этого проективного преобразования в координатах $(x_0 : x_1 : x_2)$.

Задача 5. На проективной плоскости $\mathbb{P}^2$ над полем $\mathbf{k} \neq \mathbb{F}_2$ фиксированы проективная прямая l и точка $A \notin l$, и фиксирован скаляр $\lambda \in \mathbf{k}$, $\lambda \neq 0, 1$. Рассмотрим отображение $f : \mathbb{P}^2 \setminus (\{A\} \cup l) \rightarrow \mathbb{P}^2$, $X \mapsto X'$ такое, что $X' \in (OX)$ и двойное отношение $OYXX'$ равно λ , где $Y = (OX) \cap l$.

- а) Продолжается ли f до проективного преобразования плоскости $\mathbb{P}^2$?
б) Если да, то можно ли указать такие проективные координаты $(x_0 : x_1 : x_2)$ в $\mathbb{P}^2$, в которых f имеет вид $(x_0 : x_1 : x_2) \mapsto (ax_0 : bx_1 : cx_2)$? Если да, то каковы в этом случае скаляры a, b, c ?
в) Найдите неподвижные точки f .

Задача 6. В пространстве $\mathbb{P}^3$ даны две проективные плоскости π_1 и π_2 , пересекающиеся по проективной прямой l , и точка $O \notin \pi_1 \cup \pi_2$. Рассмотрим отображение $f : \pi_1 \rightarrow \pi_2$, сопоставляющее произвольной точке $X \in \pi_1$ точку $X' = (OX) \cap \pi_2$. Оно называется *перспективным отображением с центром в точке O*. (Это определение аналогично определению перспективного отображения между прямыми в проективной плоскости, рассмотренному на лекциях.)

- а) Является ли f проективным отображением?
б) Является ли проективное отображение $f : \pi_1 \rightarrow \pi_2$, отображающее прямую $l = \pi_1 \cap \pi_2$ в себя поточечно, перспективным отображением? (*Указание:* воспользуйтесь следующим свойством перспективного отображения прямых $f : l_1 \rightarrow l_2$, $l_1 \neq l_2$, на проективной плоскости: f перспективно тогда и только тогда, когда $f(P) = P$, где $P = l_1 \cap l_2$.)