

Семинар 2.

Двойное отношение

В задачах ниже рассматривается проективная прямая $\mathbb{P}^1 = P(V)$, где V – двумерное векторное пространство над полем $\mathbf{k} \neq \mathbb{F}_2$. Как обычно, для произвольного ненулевого вектора $x \in V$ через $\langle x \rangle$ обозначается соответствующая точка в $\mathbb{P}^1$, то есть одномерное подпространство в V , натянутое на вектор x . Напомним, что *двойным отношением четверки различных точек* $A, B, C, D \in \mathbb{P}^1$, где $A = \langle a \rangle$, $B = \langle b \rangle$, $C = \langle c \rangle$, $D = \langle d \rangle$, называется число (точнее, элемент поля $\mathbf{k}$)

$$(ABCD) := \frac{\beta}{\alpha} \bigg/ \frac{\beta'}{\alpha'} = \frac{\beta \cdot \alpha'}{\alpha \cdot \beta'},$$

где $\alpha, \beta, \alpha', \beta'$ определены равенствами $c = \alpha a + \beta b$, $d = \alpha' a + \beta' b$. (На лекциях доказана корректность этого определения, т.е. его независимость от выбора ненулевых векторов – представителей подпространств $\langle a \rangle$, $\langle b \rangle$, $\langle c \rangle$ и $\langle d \rangle$.)

Задача 1. Покажите, что если E_0, E_1, X, E – четверка различных точек в $\mathbb{P}^1$, то имеет место следующее геометрическое истолкование двойного отношения: двойное отношение $(E_0 E_1 X E)$ есть координата точки X в аффинной карте $U_0 = \mathbb{P}^1 \setminus \{E_1\}$, в которой $E_0 = 0$, $E = 1$, $E_1 = \infty$.

Задача 2. Выразите через двойное отношение $(E_0 E_1 X E)$ проективные координаты точки X в проективной системе координат, определяемой точками E_0, E_1, E , т.е. в системе координат, в которой $E_0 = (1 : 0)$, $E_1 = (0 : 1)$, $E = (1 : 1)$.

Задача 3. Пусть даны четыре различные точки A_1, A_2, A_3, A_4 в $\mathbb{A}^1$ с аффинными координатами a_1, a_2, a_3, a_4 соответственно. Выразите через эти координаты двойное отношение $(A_1 A_2 A_3 A_4)$.

(Указание. Воспользоваться следующим доказанным на лекциях фактом: если $A_i = (x_i : y_i)$, $i = 1, 2, 3, 4$, то $(A_1 A_2 A_3 A_4) = \frac{|13|}{|14|} \bigg/ \frac{|23|}{|24|}$, где через $|ij|$ обозначен определитель $\begin{vmatrix} x_i & x_j \\ y_i & y_j \end{vmatrix}$.)

Задача 4. В аффинной геометрии известно так называемое простое отношение (ABC) трех различных точек A, B и C на аффинной прямой $\mathbb{A}^1$, определяемое как отношение коллинеарных векторов $\frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{AB}}$. Можно ли это простое отношение выразить через двойное отношение каких-либо 4 точек на $\mathbb{P}^1 = \mathbb{A}^1 \cup \{\infty\}$.

Задача 5. а) Найдите двойное отношение четверки точек 1, 2, 3, 4 в $\mathbb{R}$.

б) Найдите двойное отношение четверки точек $\bar{0}, \bar{1}, \bar{3}, \bar{6}$ на аффинной прямой $\mathbb{A}^1$ над полем $\mathbb{F}_7$.

Задача 6. На вещественной проективной плоскости даны 4 точки $A = (1 : 2 : 1)$, $B = (-1 : 0 : 0)$, $C = (1 : 4 : 2)$, $D = (0 : -2 : -1)$. Коллинеарны ли эти точки? Если да, то найдите двойное отношение $(ABCD)$.