Глава 2. Интегральное исчисление.
Лекция 4-18. Интеграл Римана

1 Первообразная

Определение 1 *Первообразной для данной функции* f *называется такая функция* F*, что ее производная равна данной функции:* $F' = f$*.*

Теорема 1 *Две первообразные одной функции отличаются на константу.*

Основная теорема 1 *Всякая непрерывная функция имеет первообразную.*

Соглашение 1 *По умолчанию, все области определения – интервалы.*

2 Задача о площадях: интеграл Римана

Определение 2 *Разбиение отрезка* $[a, b]$, $a < b$*–это множество* $P = \{a_0, \ldots, a_n\}$, $a_0 = a$, $a_n = b$, $a_i < a_{i+1}$; $diam\ P = \max \Delta_j$; $\Delta_j = [a_{j-1}, a_j]$*;* Δ_j *означает как отрезок, так и его длину.*

Определение 3 *Набор* α*, совместимый с разбиением* P*–это множество* $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$, $\alpha_j \in \Delta_j$*.*

Определение 4 *Интегральной суммой, соответствующей функции* f*, разбиению* P *и набору* α *(по умолчанию – совместимому с* P*), называется число:*

$$S(f, P, \alpha) = \sum f(\alpha_j)\Delta_j.$$

.

Определение 5 *Интеграл Римана* $I = \int_a^b f(x)dx$*–это предел*

$$I = \lim_{diam\ P \to 0} S(f, P, \alpha)$$

Основная теорема 2 *Всякая непрерывная функция на отрезке интегрируема по Риману.*

3 Свойства интегральных сумм

Определение 6 *$S^+(f,P) = \sum \max_{\Delta_j} f \cdot \Delta_j$, $S^-(f,P) = \sum \min_{\Delta_j} f \cdot \Delta_j$– это верхняя и нижняя интегральные суммы, соответствующие функции f и разбиению P.*

Предложение 1 *$\forall f, P, \alpha : S^-(f,P) \le S(f,P,\alpha) \le S^+(f,P)$*

Определение 7 *Рабиение Q является измельчением разбиения P, если $P \subset Q$.*

Предложение 2 *При измельчении разбиения верхняя интегральная сумма не увеличивается, а нижняя не уменьшается.*

Предложение 3 *Любая нижняя интегральная сумма (нестрого) меньше любой верхней (для одной и той же функции).*

Предложение 4 *Для любой функции f, разбиения P и набора α, выполняется неравенство $\min_{[a,b]} f(b-a) \le S(P,f,\alpha)$*

4 Доказательство основной теоремы 2

U и L–множества значений всех верхних (соответственно, нижних) сумм для f на $[a,b]$.

Лемма 1 *$U \ge \min_{[a,b]} f \cdot (b-a)$, $L \le \max_{[a,b]} f \cdot (b-a)$.*

Положим: $u = \inf U$, $l = \sup L$.

Лемма 2 *$l \le u$.*

Лемма 3 *$l = u$.*

Лемма 4 *$I := l = u = \int_a^b f(x)dx$.*

Основная теорема 2 доказана.

5 Добавления

Теорема 2 *Всякая кусочно непрерывная функция интегрируема по Риману.*

Примеры 1 *1.Функция Дирихле*

$$f = \chi_Q|_{[a,b]}$$

не интегрируема по Риману.

2.Функция Римана интегрируема по Риману–докажите!