Лекция 5-18. Формула Ньютона-Лейбница и элементарные методы интегрирования

1 Интеграл с переменным верхним пределом

Теорема 1 *Пусть функция f непрерывна, и $G(x) = \int_a^x f(t)dt$. Тогда $G' = f$.*

Следствие 1 (Формула Ньютона-Лейбница) *Если $F' = f$ и f непрерывна, то*

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

На житейский язык эта формула переводится следующим образом:

Путь, пройденный с переменной скоростью от момента времени a до момента b, равен площади под графиком скорости над отрезком $[a, b]$.

Следствие 2 (Основная теорема 1) *Всякая непрерывная функция имеет первообразную.*

2 Формула замены переменной

Теорема 2 $\int f \circ g \cdot g'(x)dx = f \circ g$

Теорема 3

$$\int_a^b f \circ g dg = \int_{g(a)}^{g(b)} f(x)dx \tag{1}$$

если g–диффеоморфизм.

На формуле (1) основан метод замены переменной.

3 Интегрирование по частям.

Формула Лейбница $(fg)' = f'g + gf'$ влечет:

$$\int f dg = fg - \int g df$$

На этой тривиальной формуле основан мощный метод интегрирования.

Примеры 1 *1.* $\int \ln x dx = x \ln x - x d \ln x = x(\ln x - 1) + C$

2. Пусть $f, g \in C^2$, $f(0) = g(0) = f(1) = g(1) = 0$. Тогда

$$\int_0^1 f'' g dx = \int_0^1 g'' f dx$$

4 Свойства интеграла Римана: линейность и аддитивность.

Теорема 4 *[линейность интеграла]* $\int_a^b (c_1 f(x) + c_2 g(x))dx = c_1 \int_a^b f(x)dx + c_2 \int_a^b g(x)dx$

Интеграл Римана может быть определен на отрезке $[a, b]$ и в случае, когда $b < a$ или $b = a$. В последнем случае он, по определению, равен нулю. В первом случае разбиением отрезка $[a, b]$, $b < a$, называется по-прежнему набор точек $P = \{a_0, \dots, a_n\}$, $a_0 = a$, $a_n = b$, но вместо условия $a_j < a_{j+1}$, налагавшегося при $a < b$, требуется: $a_j > a_{j+1}$. Все остальные определения интегральных сумм и интегралов остаются прежними.

Отрезок $[a, b]$ при $a < b$ (соответственно, $a > b$) называется *положительно* (соответственно, *отрицательно*) ориентированным. Заметим, что интеграл от положительной функции по отрицательно ориентированному отрезку отрицателен.

Теорема 5 *[аддитивность интеграла] Пусть $f \in C([a, b] \cup [b, c])$. Тогда*

$$\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx$$

Заметим что теорема верна независимо от порядка точек a, b, c на прямой.

Теоремы 1 и 2 доказываются с помощью проверки аналогичных утверждений для интегральных сумм (она тривиальна), с последующим переходом к пределу.

5 Интегральные теоремы о среднем

Теорема 6 *Пусть f - непрерывная функцпия на $\sigma = [a, b], b > a$. Тогда существует такое $\xi \in (a, b)$, что*

$$I := \int_a^b f(x)dx = (b - a)f(\xi).$$

Доказательство Нужно заметить, что

$$(b - a) \min_{\sigma} f \leq I \leq (b - a) \max_{\sigma} f$$

и применить теорему о промежуточном значении для f к числу $\frac{I}{b-a}$. $\square$

Теорема 7 *Пусть f - непрерывная функцпия на $\sigma = [a, b], b > a$ и $g > 0$ на σ. Тогда существует такое $\xi \in (a, b)$, что*

$$J := \int_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi) \int_a^b g(x)dx.$$

Доказательство Наводящее соображение. Эта теорема получается из предыдущей, если "интегрирование по отрезку с плотностью 1" заменить на "интегртрование с плотностью g".

Формальное доказательство.

Нужно заметить, что

$$\min_{\sigma} f \int_a^b g(x)dx \leq J \leq \max_{\sigma} f \int_a^b g(x)dx$$

и применить теорему о промежуточном значении к f и числу $\frac{J}{\int_a^b g(x)dx}$. $\square$