

ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО – 2018
ЛИСТОК 2

срок сдачи 20.02.2017

1. Найдите голоморфную функцию взаимно-однозначно отображающую внутренность единичного диска $|z| < 1$ на внешность эллипса $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$, $a, b \in \mathbb{R}$.

2. Найдите конформное отображение $z \mapsto w = f(z)$ верхней полуплоскости $\text{Im} z > 0$ на внутренность диска $|w| < R$ такое чтобы выполнялось $f(i) = 0$, $f'(i) = 1$ и найдите значение R .

3. Докажите, что если модуль голоморфной в области D и непрерывной в замыкании \bar{D} функции f постоянен на границе ∂D , то f имеет хотя бы один ноль в D .

4. На комплексной плоскости \mathbb{C} найдите выражения для переменных z, \bar{z} , 1-форм $dz, d\bar{z}$ и векторных полей (дифференцирований) $\partial_z, \partial_{\bar{z}}$ через координаты x, y , 1-формы dx, dy и поля ∂_x, ∂_y , найдите также обратные выражения и запишите в комплексных переменных оператор Лапласа $\Delta = \partial_x^2 + \partial_y^2$ и форму объёма $\omega = dx \wedge dy$.

5. Покажите, что если функции f, g голоморфны в области D и не имеют в ней общих нулей, то в этой области

$$\Delta \ln (|f|^2 + |g|^2) \geq 0.$$

6. Найдите условие на дифференцируемую по вещественным аргументам функцию $f(z, \bar{z})$ необходимое и достаточное для коммутирования векторных полей $\text{Re}(f(z, \bar{z})\partial_z)$ и $\text{Im}(f(z, \bar{z})\partial_z)$.

7. Пусть f голоморфная в области D функция с простыми нулями. Опишите поведение модуля и аргумента f на фазовых кривых уравнения

$$\frac{dz}{dt} = -\frac{f(z)}{f'(z)}$$

Какой тип имеет фазовый портрет окрестности особой точки данного поля?

8. Пусть f непрерывная вещественнозначная в в круге $|z| \leq 1$ функция и выполняется $|f| \leq 1$. Докажите что

$$\left| \oint_{|z|=1} f(z) dz \right| \leq 4$$

9. Докажите, что если f непрерывно дифференцируема по вещественным переменным x, y в окрестности замыкания ограниченной области D , то в этой области

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial D} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta + \frac{1}{\pi} \iint_D \frac{\frac{\partial f}{\partial \bar{\zeta}}}{\zeta - z} d\xi d\eta, \quad \zeta = \xi + i\eta$$

10. Пусть $P(z)$ многочлен. Докажите, что

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{|z-a|=R} P(z) d\bar{z} = -R^2 P'(a)$$