Правительство Российской Федерации

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования
"Национальный исследовательский университет
"Высшая школа экономики"

Факультет Математики
Отдел математического образования

Программа дисциплины

НИС «Геометрия и топология банаховых пространств»

Направление 01.03.01 «Математика» подготовки бакалавров
Направление 01.04.01 «Математика» подготовки магистров

Автор программы: Семенов П. В., д.ф.-м.н., проф., psemenov@hse.ru

Рекомендована секцией УМС по математике «___»____________ 2017 г.

Председатель С.К. Ландо ____________________

Утверждена УС факультета математики «___»_____________ 2017 г.

Ученый секретарь Ю.М. Бурман _____________________

Москва, 2017

1 Область применения и нормативные ссылки

Настоящая программа учебной дисциплины устанавливает минимальные требования к знаниям и умениям студента и определяет содержание и виды учебных занятий и отчетности.
Программа предназначена для преподавателей, ведущих данную дисциплину, студентов направлений 01.03.01 и 01.04.01 «Математика» подготовки бакалавра и магистра
Программа разработана в соответствии с:

- ОС НИУ ВШЭ;
- Базовыми учебными планами и рабочими учебными планами обучения по направлениям 01.03.01 и 01.04.01 «Математика» подготовки бакалавра и магистра, утвержденными в 2017 г.

2 Цели освоения дисциплины

Целями освоения дисциплины «Геометрия и топология банаховых пространств» являются:

- Формирование базовых представлений о банаховых пространствах последовательностей и пространств непрерывных функций на компактах.
- Знакомство основными теоремами с классической теории банаховых пространств: об открытом отображении, о замкнутом графике, Штейнгауза, Алаоглу и т.п.
- Изучение некоторых ключевых теорем современной геометрии и топологии банаховых пространств: Кадеца о гомеоморфности сепарабельных пространств, Милютина об изоморфности пространств непрерывных функций, Линденштраусса о наличии недополняемых пространств и др.
- Выработка навыков научного общения, представления глубоких математических результатов перед широкой математической аудиторией.

3 Компетенции обучающегося, формируемые в результате освоения дисциплины

В результате освоения дисциплины студент должен:

- Актуализировать свои знания, умения и навыки в работе с конечномерными нормированными пространствами, с компактными пространствами, с вероятностными мерами;
- Ознакомиться с примерами различных банаховых пространств: симметричных, сепарабельных, рефлексивных и квазирефлексивных, строго выпуклых, гладких,…
- Уметь доказывать
  - вложимость любого сепарабельного банахова пространства в пространство непрерывных функций на отрезке;
  - представление его, как фактор-пространства пространства суммируемых последовательностей;
  - критерий (Жордана - Неймана) гильбертовости банахова пространства.
- Получить представления о способах эквивалентных перенормировок банаховых пространств, о конструкциях операторов усреднения, о технике использования операторов проектирования;

- Ознакомиться с типичными примерами бесконечномерных многообразий и топологическими свойствами гильбертова куба.

В результате освоения дисциплины студент осваивает следующие компетенции:

Компетенция	Код по ФГОС/ НИУ	Дескрипторы – основные признаки освоения (показатели достижения результата)	Формы и методы обучения, способствующие формированию и развитию компетенции
умение воспринимать математические тексты в форме устных сообщений	ПК-5 ИК-М2.1 (МА)	Способен воспринимать и интерпретировать математические тексты в форме устных сообщений разного уровня строгости и детализованности, в т.ч. содержащие легко устранимые ошибки	Формируется при работе на семинаре в ходе восприятия лекционного материала, докладов других студентов и последующего обсуждения этих докладов
умение выступать с устными сообщениями на тему собственных и чужих исследований	ПК-6 ИК-М2.2/ 3.1/3.2 (МА	Способен выступить с до-кладом (устным сообще-нием) с изложением задач и результатов из области специализации студента (в т.ч. собственных)	Формируется в ходе под-готовки доклада, выступления на семинаре и последующего обсуждения
освоение специальной предметной терминологии на русском и английском языках	ПК-8 ИК-М2.4. 1/ 2.4.2 (МА)	Способен освоить специальную предметную терминоло-гию на русском и англий-ском языках для целей профессионального и научного общения	Формируется в ходе всей работы по дисциплине — прослушивания и обсуждения (на английском языке) докладов других студентов, подготовки и выступления (на английском языке) с докладом на семинаре
умение публично опи-сать собственные научные результаты и результаты других учёных	ПК-9 ИК-М2.5. 1/ 2.5.2 (МА)	Способен публично описать собственные научные результаты и результаты других учёных из области спе-циализации студента	Формируется в ходе под-готовки доклада, выступления на семинаре и последующего обсуждения
Способен находить необходимую научную информацию (в т.ч. с использованием электронных библиотечных ресурсов и баз данных) и адаптировать её (в т.ч. для научных сообщений, лекций, презентаций)	ПК-10	Осведомлён о наиболее ценных образовательных и информационных ресурсах сети Интернет. Обладает навыками эффективного информационного поиска.	Выполнение домашних заданий и подготовка ко всем формам контроля.

4 Место дисциплины в структуре образовательной программы

Настоящая дисциплина относится к циклу дисциплин теоретического обучения и блоку дисциплин по выбору.

Изучение данной дисциплины базируется на следующих дисциплинах:

- базовый курс математического анализа 1-го и 2-го годов бакалавриата;
- курсы геометрии и линейной алгебры 1-го года бакалавриата.

Для освоения учебной дисциплины, студенты должны владеть следующими знаниями и компетенциями:

- уверенной владение техникой суммирования числовых рядов, дифференцирования и интегрирования функций
- понимания основных фактов о компактных пространствах и полных метрических пространствах;
- свободное владением основами линейной алгебры и теории линейных операторов.

Основные положения дисциплины могут быть использованы в дальнейшем при изучении дисциплин:

- функциональный анализ;
- введение в теорию вероятностей;
- математические методы естествознания
- при работе над курсовыми работами и над выпускной квалификационной работой.

5 Тематический план учебной дисциплины

№	Название раздела	Всего часов	Аудиторные часы			Самостоятельная работа
			Лекции	Семинары	Практические занятия	
1	Эквивалентность норм в $\mathbb{R}^n$. Функционалы Минковского. Двойственность между нормами и нормирующими телами.	4	2			2
2	Банаховы пространства последовательностей. Пространства Орлича и непрерывных функций на компактах.	4		2		2
3	Гильбертовы пространства, изометричность сепарабельных гильбертовых прост-ранств. Равенство параллелограмма.	4	2			2
4	Сопряженные пространства и топологии в них. Теорема Алаоглу. Рефлексивные пространства. Квазирефлексивное пространство Джеймса.	4		2		2
5	Линейные операторы и проекторы. Дополняемые пространства. Метод	4	2			2

	декомпозиции Пелчинского.					
6	Универсальность $l_{1,}\ l_\infty$ и *C(K), C[0;1]*. Теорема Хана – Мазуркевича.	4		2		2
7	Паракомпактность метрических компактов. Вложение канторова множества в несчётный метрический компакт X. Оператор Дугунджи продолжения функций с подкомпакта A на X.	6		2		4
8	Милютинские отображения и вероятностные меры. Интегрирование по параметрически заданной вероятностной мере.	6		2		4
9	Милютинские отображения и операторы усреднения. Конструкции милютинских отображений.	6	2			4
10	Теорема Милютина и её обобщения. Точные милютинские отображения.	6	2			4
11	Конструкции недополняемых подпространств. Пространства Собчика.	6		2		4
12	Неизометричные конечномерные банаховы пространства. Расстояние Банаха-Мазура.	6		2		4
13	Теорема Дворецкого о сечениях. Расстояние Банаха-Мазура до гильбертовых подпространств и проекционные константы.	6	2			4
14	Характеризация Линденштраусса – Цафрири гильбертововсти в терминах дополняемости.	6	2			4
15	Выпуклые метрические компакты. Конечномерный и бесконечномерный случаи. Внутренность в выпуклом смысле.	6		2		4
16	Гильбертов куб, псевдограница и псевдовнутренность. Универсальность гильбертова куба и его однородность.	6		2		4
17	Пространство вероятностных мер на канторовском множестве и его гомеоморфность гильбертову кубу.	6		2		4
18	Теорема Келлера: выпуклый метрический компакт гомеоморфен гильбертову кубу.	6	2			4
19	Проблема гомеоморфности банаховых пространств. Частные решения: гомеоморфизмы Мазура, координатные и цилиндрические гомеоморфизмы.	6	2			4
20	Элементы теории Майкла непрерывных селекций: банахово пространство	6	2			4

	гомеоморфно декартову произведению ядра непрерывного оператора и его образа.					
21	Теорема Кадеца: сепарабельное банахово пространство гомеоморфно гильбертову пространству.	6	2			4
	Итого	**114**	**22**	**20**		**72**

6 Формы контроля знаний студентов

Тип контроля	Форма контроля					Параметры
		1	2	3	4	
Текущий				*	*	Письменный реферат по теме одной из лекций
Текущий				*	*	Доклад по одной из тем семинара
Итоговый	Экзамен				1	Письменная работа + беседа с преподавателем.

6.1 Критерии оценки знаний, навыков

Итоговая оценка выставляются по 10-ти балльной шкале.
Она включает в себя оценку за реферат, за доклад, за ответ на экзамене и бонусные баллы за посещаемость. При выставлении оценок учитываются традиционные параметры и критерии: полнота изложения, ясность и доходчивость представления материала, отсутствие прямых ошибок, наличие дополнительных сведений, выходящих за формальные рамки содержания курса. На экзамене предлагаются два вопроса. Один по формулировкам понятий и фактов, второй – по схеме (по ключевым моментам) доказательства одной из теорем Милютина, Линденштраусса-Цафрири, Келлера, Кадеца.

6.2 Порядок формирования оценок по дисциплине

Итоговая оценка по 10-ти балльной шкале получается прямым суммированием трёх оценок:

- за ответ на экзамене (от 0 до 4 баллов);
- за реферат (от 0 до 2 баллов);
- за доклад (от 0 до 2 баллов);
- за работу на семинаре (от 0 до 2 баллов).

Формульно:

$$O_{итог} = 0,4 \cdot O_{экз} + 0,2 \cdot O_{реферат} + 0,2 \cdot O_{доклад} + 0,2 \cdot O_{семин}$$

если вторые множители в каждом из слагаемых оценивать в баллах от 0 до 10.

7 Образовательные технологии

Занятия проводятся в традиционных формах и «технологиях».
На лекциях обсуждаются ключевые понятия и факты разбираемой темы, решаются иллюстрирующие их задачи, рассказывается об истории вопросов. Заметное число деталей оставляется для самостоятельной проработки. Семинарские занятия тематически дополняют лекции и проводятся по (формально) независимым темам; их основное

отличие от лекционных занятий – наличие 1 - 2 докладов участников семинара по выбранным темам.

Оценочные средства для текущего контроля и аттестации студента

7.1Тематика заданий текущего контроля

Примерные темы докладов:

1) Равенство параллелограмма как критерий гильбертовости нормы.
2) Банаховы пространства последовательностей.
3) Теорема Алаоглу.
4) Теорема об открытом отображении
5) Однородность гильбертова куба.

Примерные темы рефератов:

1) Нормы в конечномерных векторных пространствах.
2) Паракомпактность метрических пространств (Теорема А. Стоуна)
3) Операторы продолжения. Конструкция Дугунджи.
4) Операторы усреднения и милютинские отображения.
5) Теорема Бартла – Грейвза и теорема Майкла о непрерывных селекциях.

7.2 Вопросы для оценки качества освоения дисциплины

Примерные первые вопросы экзамена:

1) Сопряженное пространство и слабые топологии в нём.
2) Рефлексивные и квазирефлексивные пространства.
3) Сепарабельные пространства, как фактор пространства пространства l_1
4) Примеры неэквивалентных норм.

Примерные вторые вопросы экзамена:

1) Сформулировать теорему Дворецкого и пояснить её роль в доказательстве теоремы Линденштраусса-Цафрири.
2) Равномерно выпуклые пространства. Теорема Кадеца о перенормировке.
3) Схема доказательства теоремы Келлера
4) Принцип декомпозиции и его применение в доказательстве теоремы Милютина.

8 Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины

8.1 Базовые учебники

1. Колмогоров А.Н., Фомин С.В., Элементы теории функций и функционального анализа М. Наука, 1976
2. Кириллов А. А., Гвишиани А. Д. Теоремы и задачи функционального анализа. М.: Наука, 1988, 2001
3. Рудин У. Функциональный анализ. М.: Мир, 1975.
4. C. Bessaga, A. Pelczynski, Selected topics in infinite-dimensional topology, Warszawa, PWN, 1975

8.2 Основная литература

1. Кадец В. М. Курс функционального анализа. Харьков, 2006.
2. Дистель Дж. Геометрия банаховых пространств: избранные главы, Киев, Вища школа, 1980

3. J. Lindenstrauss, L. Tzafriri. Classical Banach spaces I. Sequence spaces. Springer-Verlag, 1977.
4. J.van Mill, The infinite-dimensional topology of function spaces, North Holland, Elsevier, 2001
5. Дэй М.М. Нормированные линейные пространства. М. Иностранная литература, 1961

8.3 Дополнительная литература

1. Халмош П. Гильбертово пространство в задачах. М.: Мир, 1970.
2. Fabian, P. Habala, P. Hajek, Vicente Montesinos Santalucia, J. Pelant, Vaclav Zizler. Functional Analysis and Infinite-Dimensional Geometry. Springer-Verlag, N. Y., 2001.
3. Пелчинский А. Линейные продолжения, линейные усреднения и их применения. Москва: Изд-во «Мир», 1970. 144 с.
4. J.van Mill, Infinite-Dimensional Topology: Prerequisites and Introduction North Holland, Elsevier, 1989
5. F. Albiac, N. Kalton, “Topics in Banach Space Theory”, Springer, 2006.

8.4. Справочники, словари, энциклопедии

При освоении курса могут быть полезны материалы по темам, размещённые в оналайн-энциклопедии http://www.wikipedia.org

8.5. Дистанционная поддержка дисциплины

Предусмотрена возможность дистанционных консультаций по электронной почте.

9 Материально-техническое обеспечение дисциплины

Для проведения лекций необходимы доска и мел, реже - компьютер и проектор. Иного оборудования не требуется.