

## Группы и алгебры Ли II

### Семинар 5

1. Выпишите явно характеры векторного, его двойственного и присоединённого представлений  $\mathfrak{sl}_3$ .
2. Докажите, что присоединённое представление  $\mathfrak{sl}_n$  изоморфно своему двойственному.
3. Вычислите характеры всех внешних степеней векторного представления  $\mathfrak{sl}_n$ .
4. Вычислите характер присоединённого представления  $\mathfrak{sl}_n$ .
5. Докажите, что для алгебры  $\mathfrak{sl}_n$  форма Киллинга  $K$  пропорциональна форме  $\text{tr}(xy)$  и найдите коэффициент пропорциональности.
6. Найдите радикал для каждой максимальной параболической подалгебры в  $\mathfrak{gl}_n$  и вычислите полупростой фактор.
- 7\*. Постройте естественную структуру ассоциативной алгебры на прямой сумме всех двойственных неприводимых представлений  $\mathfrak{sl}_2$ . Опишите явно получившуюся алгебру. Тот же вопрос про  $\mathfrak{sl}_3$ .