Листок 4.
Проективные пространства и проективные преобразования

Задача 1. В проективном пространстве $\mathbb{P}^n$ даны два проективных подпространства $\mathbb{P}^{m_1}$ и $\mathbb{P}^{m_2}$. Как связаны размерности пространств $\mathbb{P}^{m_1}$, $\mathbb{P}^{m_2}$ и $\mathbb{P}^{m_1} \cap \mathbb{P}^{m_2}$ с размерностью проективной оболочки $\mathrm{Span}(\mathbb{P}^{m_1} \cup \mathbb{P}^{m_2})$?

Задача 2. Покажите, что для любых двух проективных подпространств K и L в $\mathbb{P}^n$ выполняется неравенство $\dim(K \cap L) \geqslant \dim K + \dim L - n$. (В частности, любые две проективные прямые в $\mathbb{P}^2$ пересекаются.)

Задача 3. а) Рассмотрим группу S_4 перестановок точек A_1, A_2, A_3, A_4. Опишите с точностью до изоморфизма подгруппу в S_4 тех перестановок, которые сохраняют двойное отношение $(A_1A_2A_3A_4)$.
б) Изоморфна ли она подгруппе симметрий какой-либо фигуры в группе движений евклидовой плоскости (т. е. подгруппе движений, сохраняющих эту фигуру)?

Задача 4. В $\mathbb{P}^2$ зафиксируем две различные точки O, P и три различные прямые a, b, c через точку P, не содержащие точку O. Для произвольной точки $X \notin \{O\} \cup a \cup b \cup c$ проведем через X произвольную прямую $l \neq (OX)$, пересекающую прямые a и b в точках A и B соответственно. Обозначим точки $C = (OB) \cap c$ и $X' = (AC) \cap (OX)$.
а) Докажите, что точка X' не зависит от выбора прямой l через точку X.
б) Докажите, что отображение $X \mapsto X'$ продолжается до проективного преобразования f плоскости $\mathbb{P}^2$ и найдите неподвижные точки преобразования f.

Задача 5. В $\mathbb{P}^2$ возьмем две различные прямые l_1 и l_2, пересекающиеся в точке O, и выберем в l_1 три различные точки A, B, C, отличные от O, а в l_2 три различные точки A', B', C', отличные от O. Отметим точки $M = (AB') \cap (BA')$ и $N = (BC') \cap (CB')$. Докажите, что прямые (AA'), (BB') и (CC') принадлежат одному пучку тогда и только тогда, когда прямая (MN) проходит через точку O.

Задача 6. Согласно теореме Дезарга соответственные стороны двух перспективных треугольников лежат на прямой, называемой *осью перспективы*. В $\mathbb{P}^2$ даны три перспективных треугольника с общим центром перспективы. Докажите, что оси перспективы для всех трех пар из этих треугольников имеют общую точку. (*Примечание*: в трехмерном случае справедливость этого утверждения очевидна.)

Задача 7. Двойное отношение $(l_1l_2l_3l_4)$ четырех различных прямых пучка в $\mathbb{P}^2$ определяется как двойное отношение $(A_1A_2A_3A_4)$ четырех точек $A_i = l_i \cap m$, где m - произвольная прямая в $\mathbb{P}^2$, не проходящая через вершину пучка. (На лекциях проверялась корректность этого определения.) Докажите, что двойное отношение $(l_1l_2l_3l_4)$ равно двойному отношению $(X_1X_2X_3X_4)$ четырех точек X_i в двойственной проективной плоскости $\check{\mathbb{P}}^2$, соответствующих прямым l_i, $i = 1, 2, 3, 4$, по принципу двойственности.

Задача 8. На $\mathbb{P}^1$ даны две инволюции I_1 и I_2 с парами неподвижных точек A_1, B_1 и A_2, B_2 соответственно. Какому необходимому и достаточному условию должны удовлетворять эти пары точек, чтобы инволюции I_1 и I_2 коммутировали друг с другом, то есть чтобы выполнялось соотношение $I_1 \circ I_2 = I_2 \circ I_1$?

Задача 9. а) Докажите, что проективное преобразование f проективной прямой $\mathbb{P}^1$, переставляющее пару различных точек X и Y (то есть такое, что $f(X) = Y$ и $f(Y) = X$), является инволюцией.
б) Пусть $\mathbb{P}^1$ вложена в $\mathbb{P}^2$, и вышеуказанное преобразование f продолжено до проективного преобразования $\tilde{f}$ плоскости $\mathbb{P}^2$. Является ли $\tilde{f}$ инволюцией плоскости? Если нет, то приведите контрпример.

Задача 10. а) Найдите порядок группы $PGL(2, \mathbb{F}_q)$ для $q = 2, 3, 4$.
б) Найдите порядок группы $PGL(3, \mathbb{F}_q)$ для $q = 2, 3, 4$.
в) Найдите число элементов стабилизатора проективной прямой в группе $PGL(3, \mathbb{F}_5)$.